Differenciálszámítás alkalmazása

Dr. Vincze Szilvia

11. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

11.1 L'Hospital szabály
11.2 Magasabbrendű deriváltak
11.3 Függvény monotonitásának vizsgálata
11.4 Függvény szélsőértékének és deriváltjának kapcsolata
11.5 Függvény alaki tulajdonsága és a derivált kapcsolata
11.6 Függvény inflexiós pontja és a derivált kapcsolata

Példa – Függvények határértéke

1.) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = ?$

2.) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = ?$

3.) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x}{1 - 2x + 2x^3} = ?$

11.1 L'Hospital szabály

L'Hospital[16]-szabály.

Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f, g\colon]a,b[\to \mathbf{R}$, *és legyen* $a \leq x_0 \leq b$. *Ha* f *és* g *differenciálható* $]a,b[\setminus \{x_0\}$*-on,* $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a,b[$*-re és*

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *vagy* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, *valamint*

(2) *létezik* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *véges vagy végtelen határérték,*

akkor $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

11.1 L'Hospital szabály

A L'Hospital szabály a 0/0 vagy a ∞/∞ alakú határértékek meghatározására használható, de megfelelő helyettesítéssel más alakú függvények határértékének meghatározására is alkalmas:

1.) $0 \cdot \infty$

2.) $\infty - \infty$

3.) 0^0

4.) ∞^0

5.) 1^∞

11.2 Magasabbrendű deriváltak

Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f\colon H \to \mathbf{R}$ differenciálható, és tegyük fel, hogy az $f'\colon H \to \mathbf{R}$ deriváltfüggvény differenciálható az $x_0 \in H$ pontban. Ekkor azt mondjuk, hogy az f kétszer differenciálható x_0-ban, és az f második deriváltja az $x_0 \in H$-ban $f''(x_0) = (f'(x_0))'$.
Ha az f a H minden pontjában kétszer differenciálható, akkor f-et kétszer differenciálható függvénynek nevezzük, és $f''\colon H \to \mathbf{R}$ függvény az f második deriváltfüggvénye.

Megjegyzés. A **magasabbrendű deriváltakat** az alábbi rekurzióval értelmezzük: amennyiben az $f^{(n)}\colon H \to \mathbf{R}$ n-edik deriváltfüggvény létezik és differenciálható x_0-ban, akkor $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)}(x_0))'$ az f függvény x_0-beli $(n+1)$-edik deriváltja. Ha az f függvény a H halmaz minden pontjában $(n+1)$-szer differenciálható, akkor f $(n+1)$-szer differenciálható függvény.

11.3 Függvény monotonitásának vizsgálata

Tétel. *Legyen* $H \subseteq \mathbf{R}$, $f\colon H \to \mathbf{R}$, $]a,b[\subset H$, f *differenciálható* $]a,b[$*-n.*

(1) f *monoton nő* $]a,b[$*-n* $\iff$ $f'(x) \geq 0$ *minden* $x \in]a,b[$*-re,*

(2) f *monoton csökken* $]a,b[$*-n* $\iff$ $f'(x) \leq 0$ *minden* $x \in]a,b[$*-re,*

(3) f *szigorúan monoton nő* $]a,b[$*-n, ha* $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in]a,b[$*-re, és nincs olyan* $]c,d[\subset]a,b[$ *(részintervallum), melyre* $f'(x) = 0$ *minden* $x \in]c,d[$*-re,*

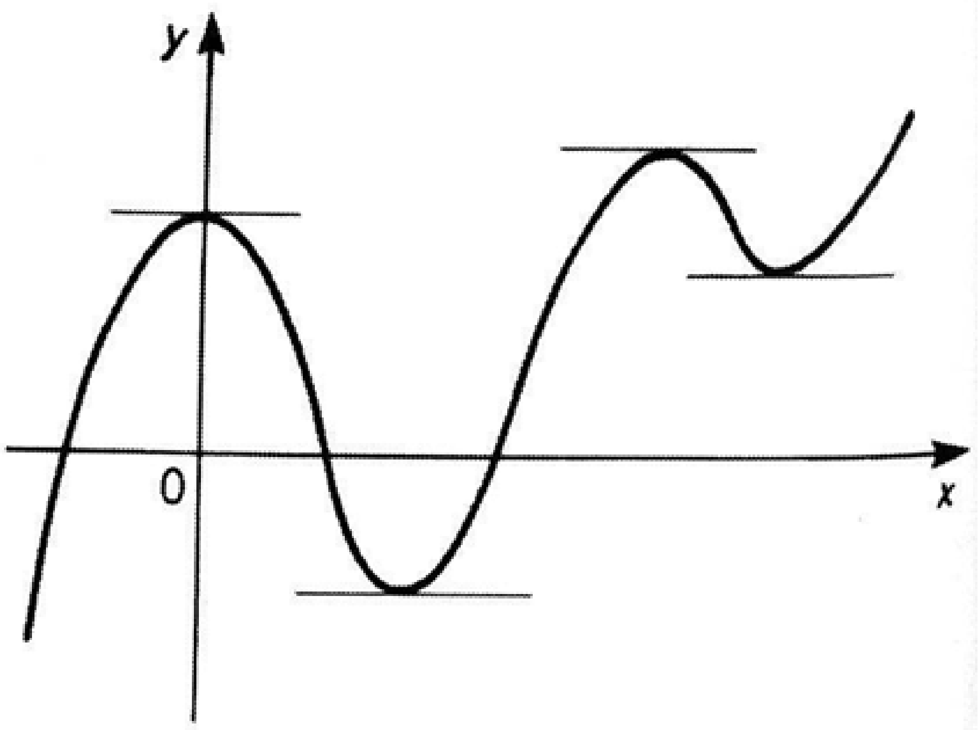
(4) f *szigorúan monoton csökken az* $]a,b[$*-n, ha* $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in]a,b[$*-re, és nincs olyan* $]c,d[\subset]a,b[$*, melyre* $f'(x) = 0$ *minden* $x \in]c,d[$*-re,*

(5) f *konstans* $]a,b[$*-n* $\iff$ *ha* $f'(x) = 0$ *minden* $x \in]a,b[$*-re.*

11.4 Függvény szélsőértékének és deriváltjának kapcsolata

Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f\colon H \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény. Ha $f'(x_0) = 0$ és f' az x_0-ban előjelet vált, akkor az x_0 az f függvény szélsőértékhelye.*

Megjegyzés. Ha az f' előjele pozitívból negatívba vált az x_0-ban, akkor x_0 maximum hely, ha az f' előjele negatívból pozitívba vált az x_0-ban, akkor x_0 minimum hely.



11.4 Függvény szélsőértékének és deriváltjának kapcsolata

Az $]a;b[$ intervallumban differenciálható $f(x)$ függvénynek az intervallum x_0 pontjában csak akkor lehet lokális szélsőértéke, ha $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$. Ez a szélsőérték létezésének **szükséges feltétel**e.

Ha emellett az x_0 pont környezetében a derivált még előjelet is vált, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 pont környezetében lokális szélsőértéke van.

11.4 Függvény szélsőértékének és deriváltjának kapcsolata

A derivált előjelváltásának módjából a szélsőérték jellegére is következtethetünk.

x	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	**lokális max.**	↘

x	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	**lokális min.**	↗

11.5 Függvény alaki tulajdonságai és a derivált kapcsolata

Tétel. *Legyen* $H \subseteq \mathbf{R}$, $f\colon H \to \mathbf{R}$, $]a,b[\, \subset H$, f *kétszer differenciálható* $]a,b[$*-n.*

(1) f *konvex* $]a,b[$*-n* $\iff$ $f''(x) \geq 0$ *minden* $x \in \,]a,b[$*-re,*

(2) f *konkáv* $]a,b[$*-n* $\iff$ $f''(x) \leq 0$ *minden* $x \in \,]a,b[$*-re.*

11.6 Függvény inflexiós pontja és a derivált kapcsolata

Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f\colon H \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ha $f''(x_0) = 0$ és f'' az x_0-ban előjelet vált, akkor az x_0 pontban az f függvénynek inflexiós pontja van.*

x	**$x < x_0$**	**$x = x_0$**	**$x > x_0$**
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv

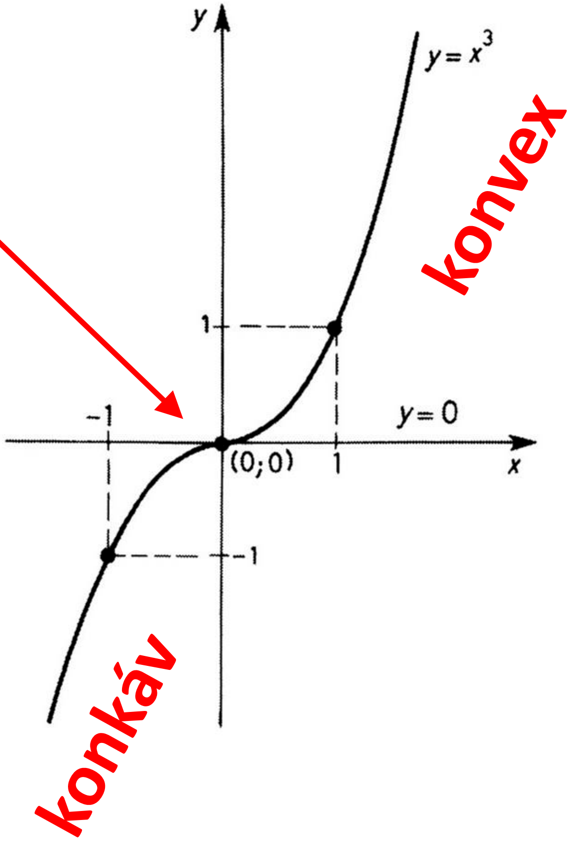
x	**$x < x_0$**	**$x = x_0$**	**$x > x_0$**
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

11.6 Függvény inflexiós pontja és a derivált kapcsolata

Inflexiós pont, ahol a függvény konvexitása megváltozik

Ha az *f(x)* függvény az]a;b[intervallumban kétszer differenciálható, és

$f''(x) \geq 0$, akkor az *f(x)* függvény **konvex**,
ha **$f''(x) \leq 0$**, akkor az *f(x)* függvény **konkáv**.



11.6 Függvény inflexiós pontja és a derivált kapcsolata

Ha az $f(x)$ függvény az $]a;b[$ intervallum x_0 pontjában kétszer differenciálható, és $f''(x_0) = 0$, valamint a második derivált előjelet vált, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen **inflexiós pont**ja van.

Ha az $f(x)$ függvény az $]a;b[$ intervallum x_0 pontjában háromszor differenciálható, és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen inflexiós pontja van.

Tétel

Tétel. *Legyen* $H \subseteq \mathbf{R}$, $f \colon H \to \mathbf{R}$ $(n+1)$*-szer differenciálható függvény. Ha* x_0 *a* H *belső pontja úgy, hogy*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0,$$

de $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, *akkor*

(1) *ha* n *páros, akkor* x_0 *inflexiós pont,*

(2) *ha* n *páratlan, akkor* x_0 *szélsőértékhely, és ha* $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, *akkor* x_0 *minimumhely, ha* $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, *akkor* x_0 *maximumhely.*

Tétel

Tétel. *Legyen* $H \subseteq \mathbf{R}$, $f\colon H \to \mathbf{R}$, $]a,b[\subset H$ *és* f *differenciálható* $]a,b[$*-n.*

(1) f *konvex* $]a,b[$*-n* $\iff$ f' *monoton nő* $]a,b[$*-n,*

(2) f *konkáv* $]a,b[$*-n* $\iff$ f' *monoton csökken* $]a,b[$*-n.*

Köszönöm a figyelmet!