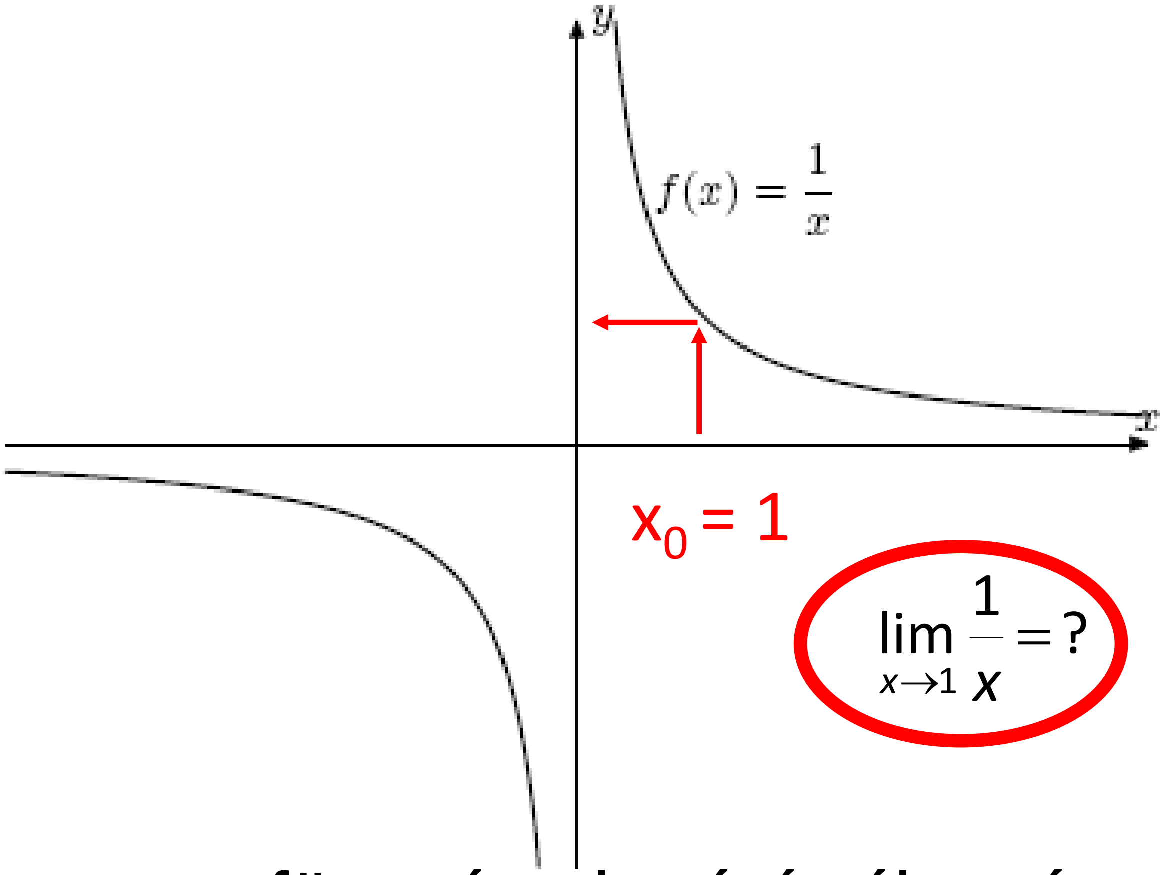
Függvények határértéke és folytonossága

Dr. Vincze Szilvia

9. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE, FOLYTONOSSÁGA

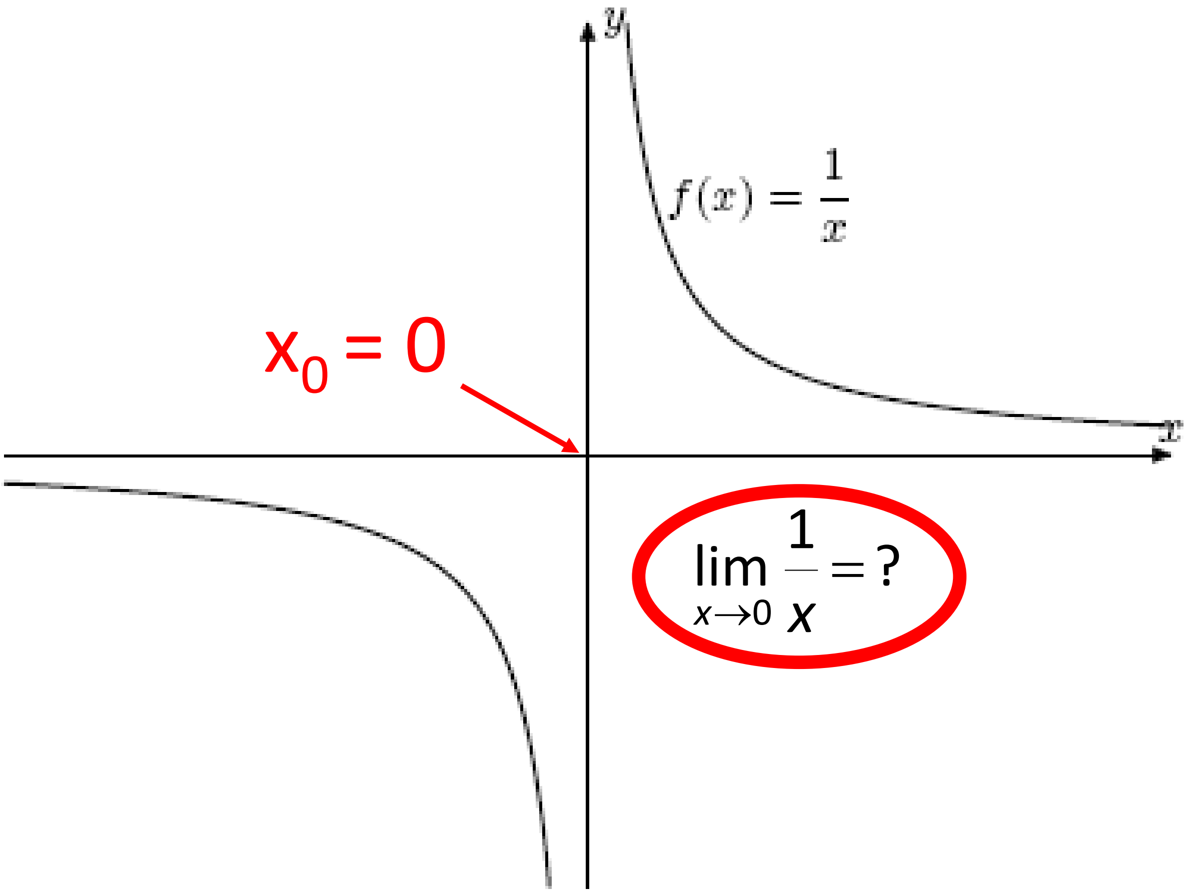
Példa

Ábrázoljuk az $f(x) = 1/x$ függvényt!



függvény határértéke véges x_0 helyen
(x_0-ban a függvény értelmezve van)

Példa

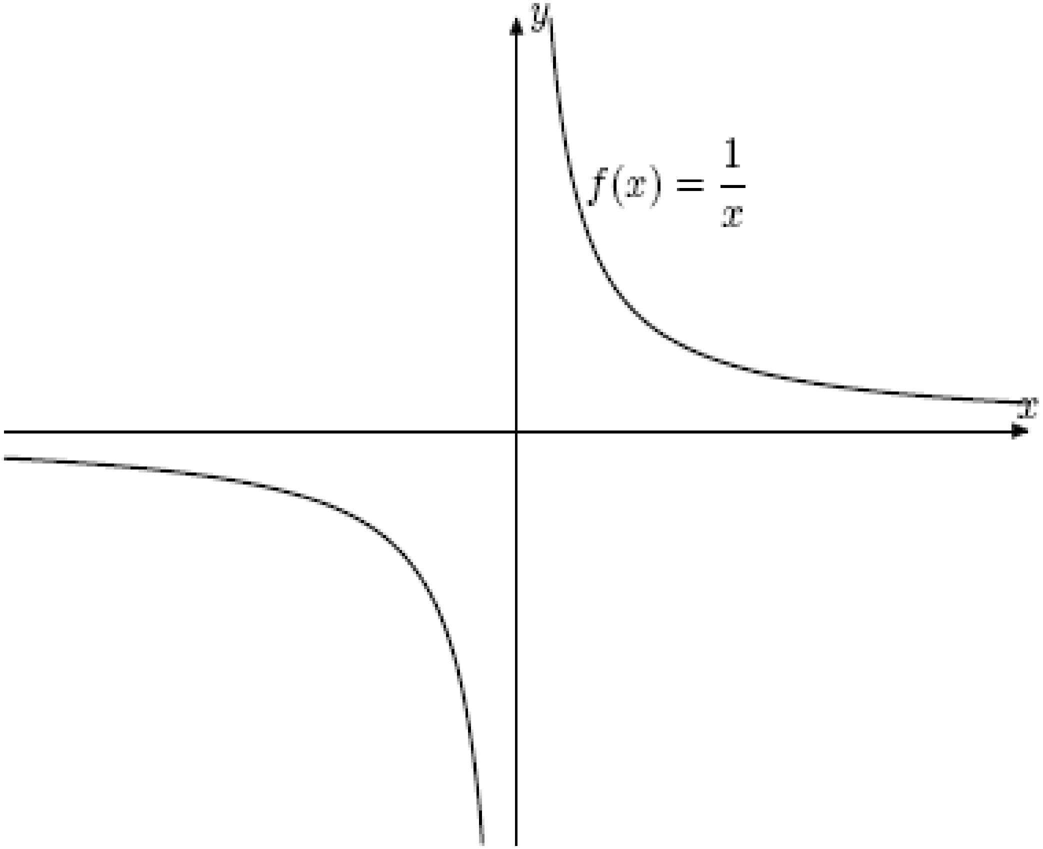


függvény határértéke véges x_0 helyen

(x_0-ban a függvény nincs értelmezve)

Példa

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=?$$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=?$$

függvény határértéke $\pm\infty$-ben

Bevezető gondolatok

- A számegyenesen bármely x_0 ponthoz meg tudunk adni hozzá konvergáló, valós számokból álló sorozatot. Az x_0 lehet egy függvény értelmezési tartományának eleme is.
- Tekintsük az $f\,(x) = 2x+1$ függvényt. Az $x_0=3$ pontjához adjunk meg olyan sorozatokat, melyek a 3-hoz konvergálnak!
- Bármely számhoz végtelen sok, hozzá konvergáló sorozat adható meg, legegyszerűbben úgy, hogy az illető számhoz egy nullsorozatot adunk.

Bevezető gondolatok

Ha a függvény az x_0 környezetében mindenhol értelmezve van, akkor az x_0-hoz tartó (x_n) sorozat egyes értékeihez tartozó függvényértékek is sorozatot alkotnak.

$$\mathbf{f(x) = 2x + 1\,;\; x_0 = 3;\; pl.: x_n = 3 + 1/n}$$

Példa

$$\underbrace{x_n = 3 + \frac{1}{n}} \qquad \underbrace{f(x_n) = 2x_n + 1 = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1}$$

n	x_n	$f(x_n)$

Példa

$$\underbrace{x_n = 3 + \frac{1}{n}}$$

$$\underbrace{f(x_n) = 2x_n + 1 = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1}$$

n	**x_n**	**$f(x_n)$**
n = 1	x_1 = 3 + 1/1 = 4	f(4) = 2·4 + 1 = 9

Példa

$$\underbrace{x_n = 3 + \frac{1}{n}} \qquad \underbrace{f(x_n) = 2x_n + 1 = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1}$$

n	x_n	$f(x_n)$
n = 1	$x_1 = 3 + 1/1 =$ **4**	f(**4**) = 2·4 + 1 = 9
n = 2	$x_2 = 3 + 1/2 =$ **7/2**	f(**7/2**) = 2·7/2 + 1 = 8

Példa

$$\underbrace{x_n = 3 + \frac{1}{n}} \qquad \underbrace{f(x_n) = 2x_n + 1 = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1}$$

n	x_n	$f(x_n)$
n = 1	x_1 = 3 + 1/1 = **4**	f(**4**) = 2·4 + 1 = 9
n = 2	x_2 = 3 + 1/2 = **7/2**	f(**7/2**) = 2·7/2 + 1 = 8
n = 3	x_3 = 3 + 1/3 = **10/3**	f(**10/3**) = 2·10/3 + 1 = 25/3

Példa

n	x_n	$f(x_n)$
n = 1	$x_1 = 3 + 1/1 =$ **4**	f(**4**) = 2·4 + 1 = 9
n = 2	$x_2 = 3 + 1/2 =$ **7/2**	f(**7/2**) = 2·7/2 + 1 = 8
n = 3	$x_3 = 3 + 1/3 =$ **10/3**	f(**10/3**) = 2·10/3 + 1 = 25/3
n = 4	$x_4 = 3 + 1/4 =$ **13/4**	f(**13/4**) = 2·13/4 + 1 = 15/2

$$x_n = 3 + \frac{1}{n} \qquad f(x_n) = 2 \cdot x_n + 1$$

Példa

n	x_n	$f(x_n)$
n = 1	$x_1 = 3 + 1/1 =$ **4**	$f(\mathbf{4}) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$
n = 2	$x_2 = 3 + 1/2 =$ **7/2**	$f(\mathbf{7/2}) = 2 \cdot 7/2 + 1 = 8$
n = 3	$x_3 = 3 + 1/3 =$ **10/3**	$f(\mathbf{10/3}) = 2 \cdot 10/3 + 1 = 25/3$
n = 4	$x_4 = 3 + 1/4 =$ **13/4**	$f(\mathbf{13/4}) = 2 \cdot 13/4 + 1 = 15/2$

$$\boxed{x_n = 3 + \frac{1}{n}} \qquad f(x_n) = 2 \cdot x_n + 1$$

$$(x_n) = \left(4; \frac{7}{2}; \frac{10}{3}; \frac{13}{4}; \ldots\right) \qquad \boxed{f(x_n) = \left(2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1\right)}$$

Példa

$$\boxed{x_n = 3 + \frac{1}{n}}$$

$$\boxed{f(x_n) = \left(2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1\right)}$$

$$\lim (x_n) = \lim \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3$$

$$\lim f(x_n) = \lim \left(7 + \frac{2}{n}\right) = 7$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7$$

9.1 Függvény határértéke véges x_0 helyen

Az f **függvény**nek az **x_0 helyen határértéke az A**, ha minden $(x_n) \to x_0$ esetén $(f(x_n)) \to A$.

Feltétel, hogy a függvény az x_0 környezetében értelmezve legyen.

A függvény határértékének jelölése:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A}$$

Megjegyzés

- A definícióban szereplő (x_n) sorozatnak tetszőlegesnek kell lennie, azaz az x_0-hoz a sorozat nemcsak jobbról vagy balról konvergálhat, hanem egyszerre mindkét oldalról is.

- Ha a bal és a jobboldali határértékek megegyeznek, akkor a függvénynek van határértéke az x_0 helyen.

Példa

Adjunk meg az $f(x) = 2x+1$ függvény esetén az $x_0=3$ ponthoz balról és jobbról konvergáló sorozatokat!

$$\underbrace{\lim_{x \to 3-} (2x+1) = ?}_{\text{bal oldali határérték}} \qquad \underbrace{\lim_{x \to 3+} (2x+1) = ?}_{\text{jobb oldali határérték}}$$

Megjegyzés

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0 +} f(x)$$

bal oldali határérték = jobb oldali határérték

Ha a bal és a jobboldali határértékek megegyeznek, akkor a függvénynek van határértéke az x_0 helyen.

9.1.1 Bal- és jobboldali határérték

Ha az x_0-hoz minden balról konvergáló (x_n) sorozat esetén (ekkor a sorozat minden tagjára: $x_n < x_0$) a függvényértékek sorozata tart A_b-hez, akkor A_b **bal oldali határérték**.

$$\lim_{x_0 - 0} f(x) = A_b$$

A **jobb oldali határérték** fogalma a fentiekkel teljesen analóg.

$$\lim_{x_0 + 0} f(x) = A_j$$

9.1.2 Határértékre vonatkozó műveletek

A **határértékképzés művelettartó**, azaz ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B$$

akkor

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x) \right) \pm \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \right) = A \pm B$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \right) = A \cdot B$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) / g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x) \right) / \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \right) = \frac{A}{B}$$

$$\lim_{x\to x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \cdot A; \quad \lambda \in R$$

Megjegyzés

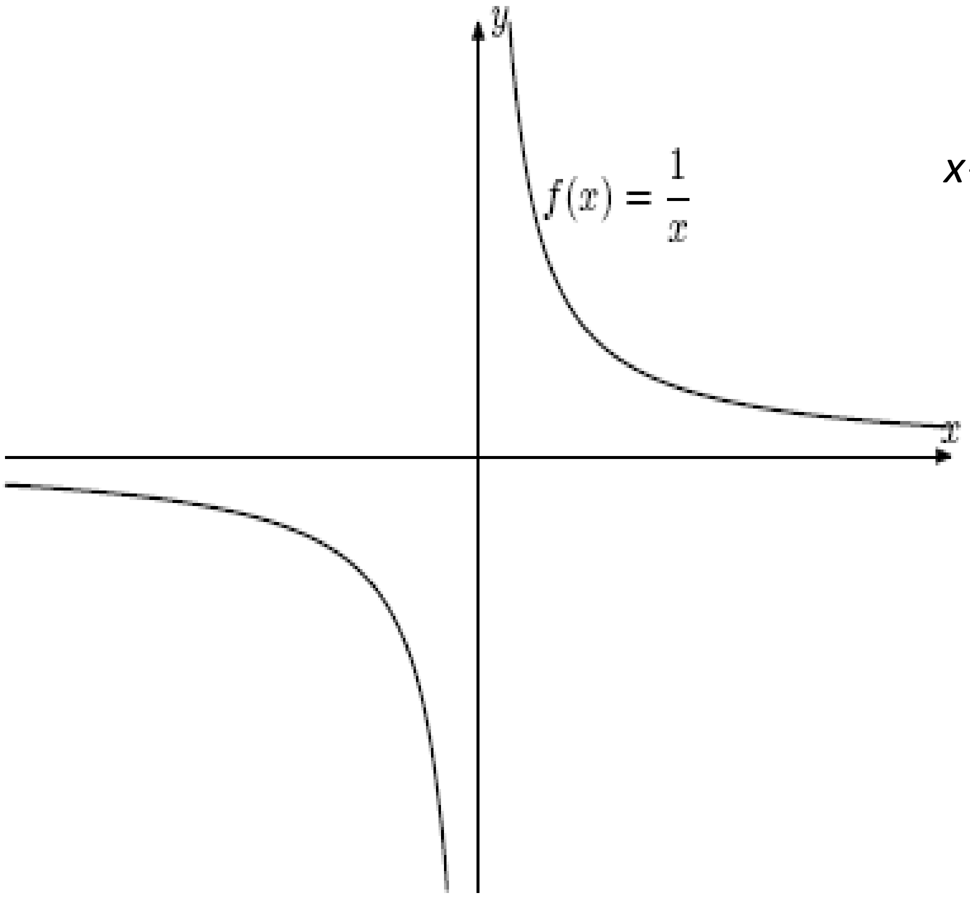
- Ha a függvény az x_0 helyen értelmezve van, akkor a határértéke megegyezik a helyettesítési értékével.

- Ha a függvény az x_0 helyen nincs értelmezve, akkor jobb és baloldali határértéket kell számítanunk!

Példa

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

$$\lim_{x\to 0-\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{x}\right) = ?;\ \lim_{x\to 0+\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$



9.2 Függvény határértéke + végtelenben

Legyen D $\subseteq$ **R** felülről nem korlátos halmaz,
f: D $\rightarrow$**R** adott függvény továbbá $x_n \in D$ olyan sorozat, amelyre:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Ha az (f(x_n)) sorozat minden ilyen tulajdonságú (x_n) sorozat esetén konvergens és

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = A$$

akkor azt mondjuk, hogy az ***f* függvénynek létezik a határértéke a végtelenben** és ez A-val egyenlő:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

9.2 Függvény határértéke - végtelenben

Legyen D $\subseteq$ **R** alulról nem korlátos halmaz,
f: D $\rightarrow$**R** adott függvény továbbá $x_n \in$D olyan sorozat, amelyre:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Ha az ($f(x_n)$) sorozat minden ilyen tulajdonságú (x_n) sorozat esetén konvergens és

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = A$$

akkor azt mondjuk, hogy az ***f* függvénynek létezik a határértéke a mínusz végtelenben** és ez A-val egyenlő:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

9.3 Nevezetes határértékek

A „sorozat-analóg” határértékek:

$$1.)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0\quad (x\in R, x\neq 0)$$

$$2.)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$3.)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$$

$$4.)\quad \lim_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}0, ha\ 0\le a<1\\ 1, ha\ a=1\\ \infty, ha\ a>1\end{cases}$$

9.3 Nevezetes határértékek

5.) $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{1} = \ln a \quad (a > 0 \text{ és } a \text{ állandó})$$

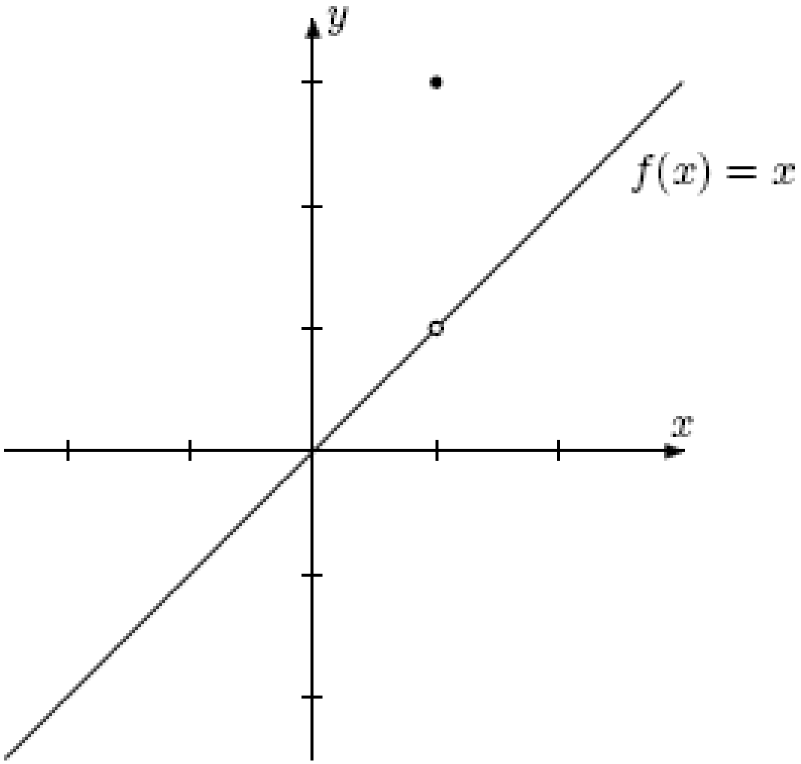
6.) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

7.) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

8.) $$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

9.4 Függvények folytonossága

$$f(x)=\begin{cases} x & ha \quad x\neq 1 \\ 3 & ha \quad x=1 \end{cases}$$



A folytonosság téveszméje: a függvény grafikonját a ceruza felemelése, áthelyezése nélkül nem tudtam „megrajzolni”!
A függvény folytonossága pontbeli tulajdonság.

Példa

Az f (x) = 1 (x racionális szám) függvény esetén, a függvényértékek „végtelenül közel” vannak egymáshoz, hiszen bármely racionális számhoz végtelenül közel végtelen sok racionális szám van. Ugyanakkor minden (x, f (x)) függvénypont között „lyuk” van, mert bármely két racionális szám között van irracionális szám, tehát a definiált pontok nem köthetőek össze.

9.4 Függvények folytonossága

Az ***f* függvény folytonos egy x_0 pontban**, ha egyszerre eleget tesz a következő három feltételnek:

- a függvényt értelmezzük az x_0 pontban és annak környezetében (azaz van helyettesítési érték);
- van határértéke a függvénynek az x_0 pontban;
- a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

9.5 Bal- és jobboldali folytonosság

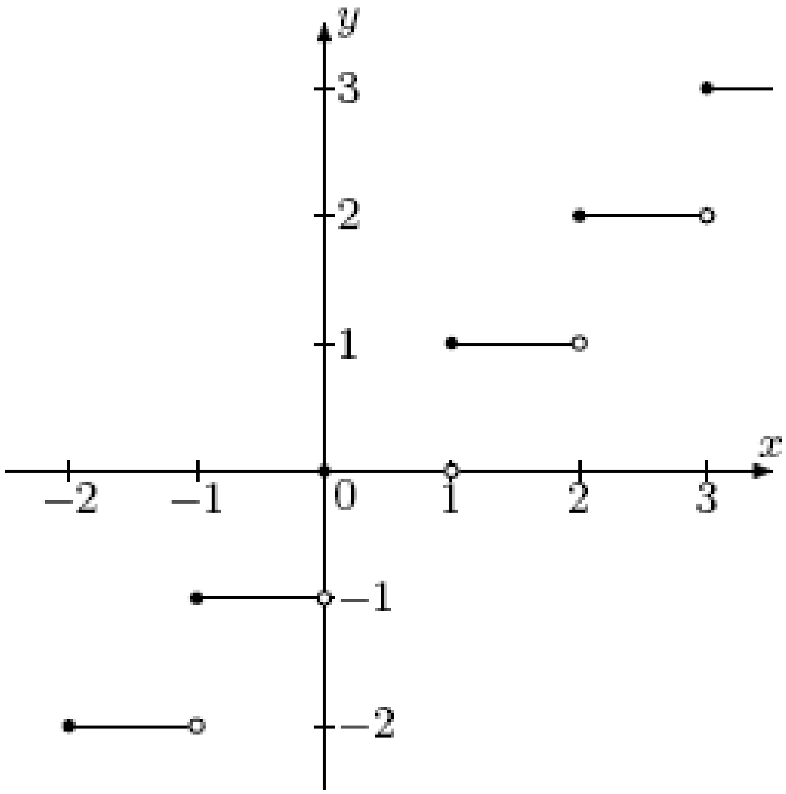
Beszélhetünk **balról illetve jobbról folytonos függvények**ről:

Az f (x) függvény balról folytonos az x_0 pontban, ha „csak” a baloldali határértéke egyezik meg a helyettesítési értékével:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

Jobboldali folytonosságnál: $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

Példa



x_0=2 helyen a függvény helyettesítési értéke: f(2)=2

a bal oldali határérték: 1
a jobb oldali határérték: 2

A függvény jobbról folytonos, balról nem.

9.4 Függvények folytonossága - definíciók

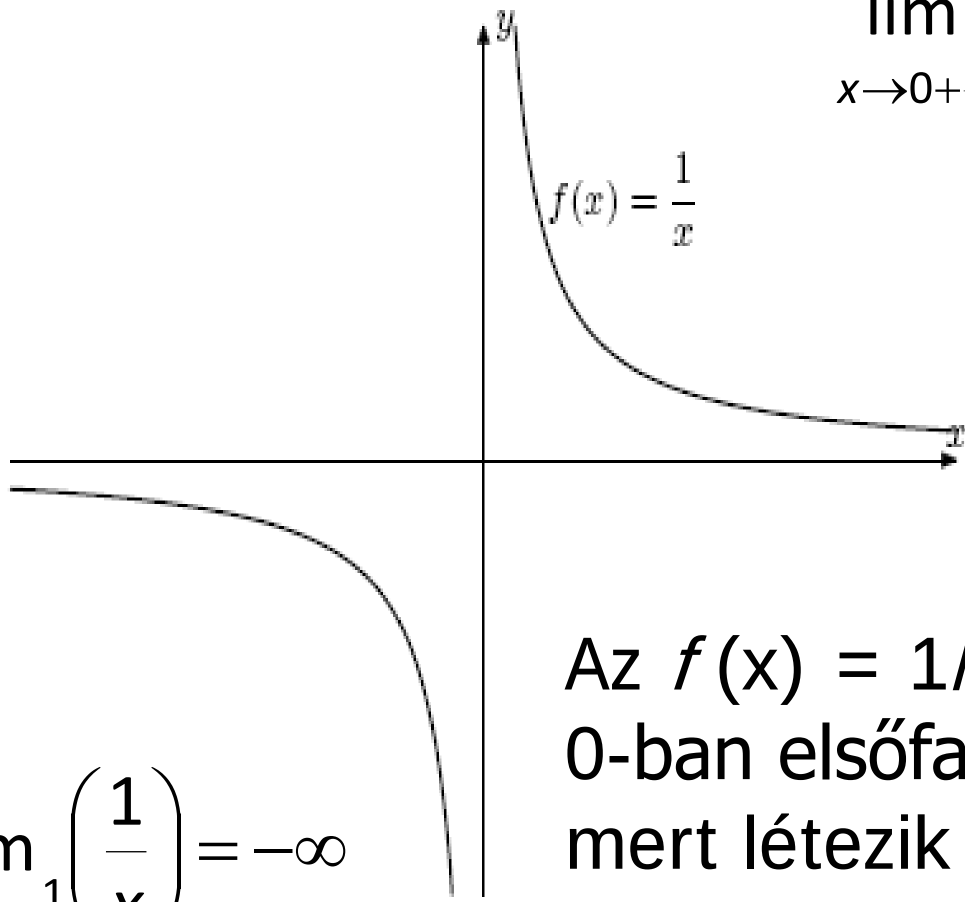
- Az ***f* függvény** az értelmezési tartományának egy szakaszán (egy intervallumon) **folytonos**, ha az intervallum minden pontjában folytonos.
- **A folytonosság művelettartó**, azaz két folytonos függvénnyel műveletet végezve (alapműveletek, összetett-függvény) a kapott új függvény is folytonos lesz mindazokon a helyeken, ahol a művelettel az értelmezési tartomány nem sérül, nem szűkül,nem keletkezik szakadása.

Szakadási hely

- Ha az *f* függvény az értelmezési tartományának valamely pontjában nem folytonos, akkor ott a függvénynek **szakadási helye** van.
- Az *f* függvénynek az x_0-ban **elsőfajú szakadás**a van, ha itt létezik a jobb és baloldali határértéke. Ha még az is teljesül, hogy a jobb és baloldali határérték megegyezik, akkor ez a szakadás **megszűntethető**. A függvény szakadási helye másodfajú, ha nem elsőfajú.

Példa

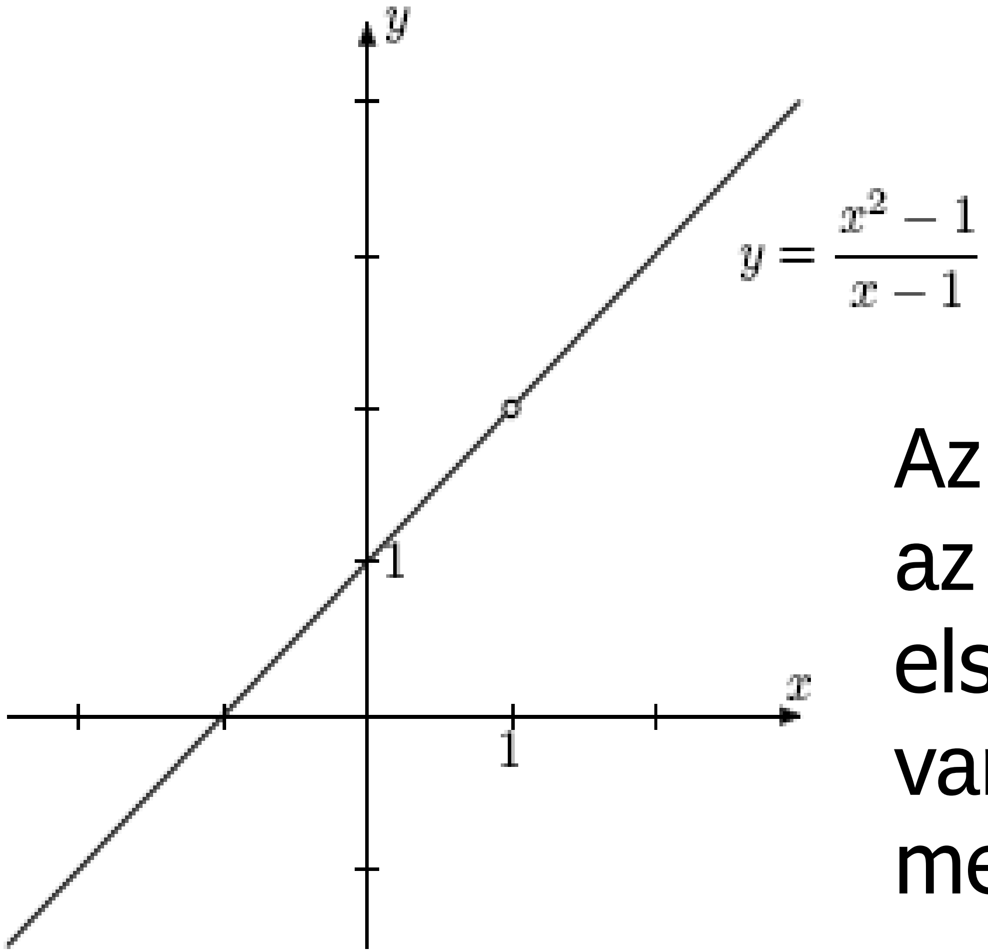
$$\lim_{x\to 0+\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty$$



$$\lim_{x\to 0-\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

Az f (x) = 1/x függvénynek a 0-ban elsőfajú szakadás van, mert létezik a bal és a jobboldali határértéke.

Példa



Az *f* függvénynek az x=1 helyen elsőfajú szakadása van, ami megszűntethető.

Példa

Adja meg az alábbi függvénynek a határértékét az $x_0 = 2$; $x_0=1$ pontokban és a $\pm\infty$-ben!

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + 2$$

Példa

Adja meg az alábbi függvénynek a határértékét az $x_0 = 2$ pontban!

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6}$$

Példa

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0}$$

határozatlan alakú tört

Határozatlan alakúnak nevezünk egy törtet, ha 0/0 vagy ∞/∞ alakú.

Példa

Ha ilyen tört határértékét szeretnénk kiszámolni, első lehetőségünk a szorzattá alakítás (ez a zérushelyek megkeresésével történik!)
A szorzattá alakítással rendszerint ugyanaz a szorzótényező jelenik meg a számlálóban, mint a nevezőben, és ezzel elérjük, hogy a tört egyszerűbb alakra hozható a következő nevezetes határérték segítségével:

$$\lim_{x \to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$$

Köszönöm a figyelmet!