Relációk és függvények

Dr. Vincze Szilvia

3. RELÁCIÓK ÉS FÜGGVÉNYEK

3.1 Rendezett elempár fogalma
3.2 Descartes-szorzat
3.3 Reláció fogalma, reláció inverze, relációk kompozíciója, nevezetes relációk
3.4 Függvény fogalma
3.5 Inverz függvény
3.6 Függvények leszűkítése
3.7 Összetett függvény
3.8 Halmazok számossága, véges és végtelen halmazok,

Bevezető gondolatok

Mind a hétköznapi, mind a tudományos életben gyakran előfordul, hogy bizonyos halmazok elemei között **kapcsolat** figyelhető meg. A kapcsolat fogalmának matematikai leírása a **reláció**.

Példák relációkra

- A tér egyenesei és síkjai között a merőlegesség
- A természetes számok halmazában az oszthatóság
- Rokonsági kapcsolat
- A sertésállomány nyilvántartása az egyed-fülszám alapján

3.1 Rendezett elempár

Legyen h és k két tetszőleges elem. Ha ezek közül az egyiket (mondjuk) a h-t elsőnek, a k-t másodiknak kijelöljük, akkor **rendezett elempár**ról beszélünk, és ezt **(h,k)-**val jelöljük.

Két elempár egyenlő:

$$(h,k) = (l,m) \Leftrightarrow h=l \text{ és } k=m$$

3.2 Descartes-szorzat

A függvénytan egyféle megalapozásánál használjuk a Descartes-szorzatot, amely szintén egy hozzárendelés.

Legyenek H és K nemüres halmazok. A H és K halmazok **Descartes-szorzat**án a

$$\mathbf{H \times K = \{ (h,k) \mid h \in H, k \in K \}}$$

rendezett elempárokból álló halmazt értjük.

3.2 Példa - Descartes-szorzat

Tekintsük a $H = \{ 1, 2 \}$ és $K = \{ 1, 3, 4 \}$ halmazokat. Adjuk meg a $H \times K$ és $K \times H$ Descartes-szorzatokat!

3.2 Descartes-szorzat

Legyenek adottak a H_1, H_2, ..., H_n ($n \geq 2$) nemüres halmazok. A H_1, H_2, ..., H_n halmazok Descartes-szorzata a

$$\mathbf{H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n =}$$
$$\mathbf{\{ (h_1, h_2, \ldots, h_n) \mid h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2,\ \ldots ,\ h_n \in H_n \}}$$

halmaz, ahol (h_1, h_2, ..., h_n)-t **rendezett szám n-es**eknek nevezzük.

Megjegyzés

Az $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ halmazt kétdimenziós térnek (síknak) nevezzük, az $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$ halmazt háromdimenziós térnek mondjuk.

Példa – Descartes szorzat, műveletek

- Legyen $A = \{ -1, 0, 3, 4\}$ és $B = \{ -2, 5\}$. Ábrázoljuk Descartes-rácson az $A \times B$ halmazt.

- Legyen $A = \{ 1, 2\}$ és $B = \{ 1, 2, 3\}$. Adja meg az $(A \times B) \cap (B \times A)$, illetve az $(A \times B) \setminus (B \times A)$ halmazokat.

3.3 Reláció fogalma

A H és a K halmazok közötti H x K Descartes-féle szorzatának bármely ρ részhalmazát a H és a K halmazok közötti **reláció**nak nevezzük. (A H és a K sorrendje fontos!)

Jelölések:

$(h,k) \in \rho$

$h \, \rho \, k$

$\rho\,(h,k)$

$\rho \, hk$

3.3 Reláció értelmezési tartománya, értékkészlete

A ρ reláció **értelmezési tartomány**a azon h ($\in$H) elemeknek a halmaza, amelyekhez van olyan k ($\in$K), hogy (h,k) $\in \rho$, azaz

$$\mathbf{D}_{\rho} = \{ h \in H \mid \exists\, k \in K : (h,k) \in \rho \} \subseteq H.$$

A ρ reláció **értékkészlete** azoknak a k ($\in$K) elemeknek a halmaza, amelyekhez van olyan h ($\in$H), hogy (h,k) $\in \rho$, azaz

$$\mathbf{R}_{\rho} = \{ k \in K \mid \exists\, h \in H : (h,k) \in \rho \} \subseteq K.$$

3.3 Reláció inverze

A ρ reláció **inverz**én azt a ρ^{-1}-gyel jelölt relációt értjük, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$\boldsymbol{\rho^{-1} = \{\, (k,h) \mid (h,k) \in \rho \,\} \subseteq K \times H.}$$

Példa – reláció értelmezési tartománya, értékkészlete, inverze

- Határozzuk meg az alábbi ρ reláció értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

$H = \{ 0, 1, 2\}$, $K = \{ 0, 3, 5\}$ $\rho \subseteq H \times K$ és $h \, \rho \, k$ akkor és csakis akkor, $h * k = 0$.

Példa – reláció értelmezési tartománya, értékkészlete, inverze

- Határozzuk meg az alábbi f reláció értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

$A = \{ -5, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{ -2, 1, 2, 3\}$
$f \subseteq A \times B$ és $x\ f\ y$ pontosan akkor, ha $x + y = 7$.

3.3 Összetett relációk, relációk kompozíciója

A $\rho \subseteq H \times K$ és $\rho \subseteq K \times L$ adott reláció. A belőlük képzett **összetett reláció**:

$$\boldsymbol{\rho' \circ \rho =}$$

$$\boldsymbol{\{ (h,l) \in H \times L \mid \exists\, k \in K: (h,k) \in \rho \text{ és } (k,l) \in \rho' \}}$$

H és L halmazok elemei közötti reláció

Példa – összetett relációk

Legyenek adottak a következő halmazok.

$H = \{ -2, -1, 0, 1, 2\}$, $K = \{ -1, 0, 1, 2\}$
$L = \{ 0, 1, 2, 3, 4\}$,

és az alábbi két reláció:
$\rho = \{ (h,k) \in H \times K \mid |h| = k\}$ és
$\rho' = \{ (k,l) \in K \times L \mid k + 3 = l\}$

Adjuk meg a $\rho' \circ \rho$ összetett reláció elemeit.

3.3 Relációk tulajdonságai

- **Reflexív**, azaz H minden elemére: h ρ h.
- **Szimmetrikus**, azaz H tetszőleges h , k elemére: h ρ k $\Rightarrow$ k ρ h.
- **Antiszimmetrikus**, azaz H tetszőleges h , k eleme esetén teljesül, h ρ k és k ρ h $\Rightarrow$ h = k.
- **Tranzitív**, azaz H minden h, k, l elemére: h ρ k és k ρ l $\Rightarrow$ h ρ l.
- **Lineáris**, azaz H minden h,k elemére h ρ k vagy k ρ h teljesül.

3.3 Nevezetes relációk

A H halmazon definiált reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt **ekvivalenciareláció**nak nevezzük.

A H halmazon definiált (és az egyenlőségtől különböző) reflexív, antiszimmetrikus, lineáris és tranzitív relációt **rendezési relációnak** nevezzük.

3.4 Függvény fogalma

Legyenek X, Y nemüres halmazok.

Az $\mathbf{f} \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ relációt **függvény**nek nevezzük, ha $(x,y) \in f$ és $(x,z) \in f$ esetén $y = z$ (azaz ha az f reláció egyértelmű).

Példa – mely relációk függvények?

Döntsük el, hogy a következő relációk függvények-e!

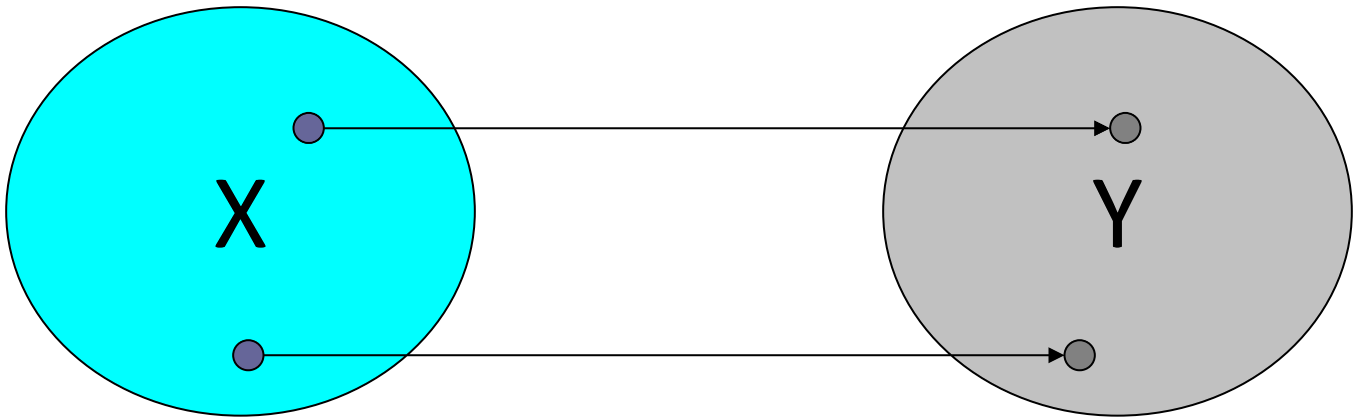
- $X = \{ -5, 2, 3, 4, 5, 9\}$ és $Y = \{ -2, 1, 2, 3\}$

  $f = \{ (x,y) \in X \times Y \mid x + y = 7 \}$

- $X = \{ 0, 1, 2\}$ és $Y = \{ 0, 3, 5\}$

  $g = \{ (x,y) \in X \times Y \mid x*y = 0 \}$

Megjegyzések



X : értelmezési tartomány
D_f; ÉT

Y : értékkészlet
R_f; ÉK

A hozzárendelésnek **egyértékű**nek kell lennie, vagyis egy X-beli elemhez nem tartozhat az Y halmazban kettő, vagy több elem.

Megjegyzések

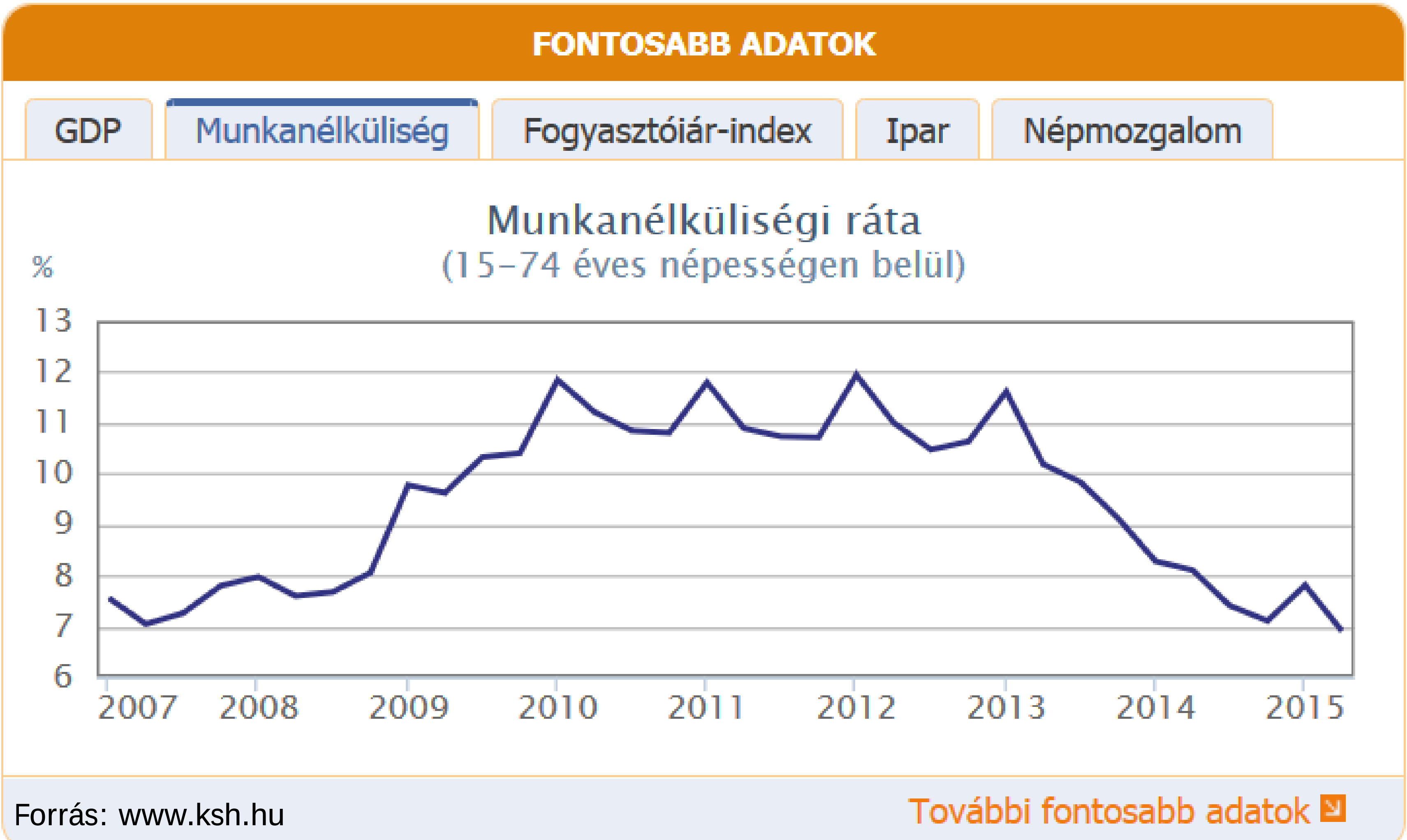
- Egy X-beli elemhez legfeljebb egy Y-beli elem tartozhat. Ebben az esetben az egyértelmű y elemet f(x)-szel jelöljük.

- Mivel minden függvény reláció, így a függvény értelmezési tartományának és értékkészletének definíciója megegyezik a reláció értelmezési tartományával és értékkészletével.

Példák függvényekre

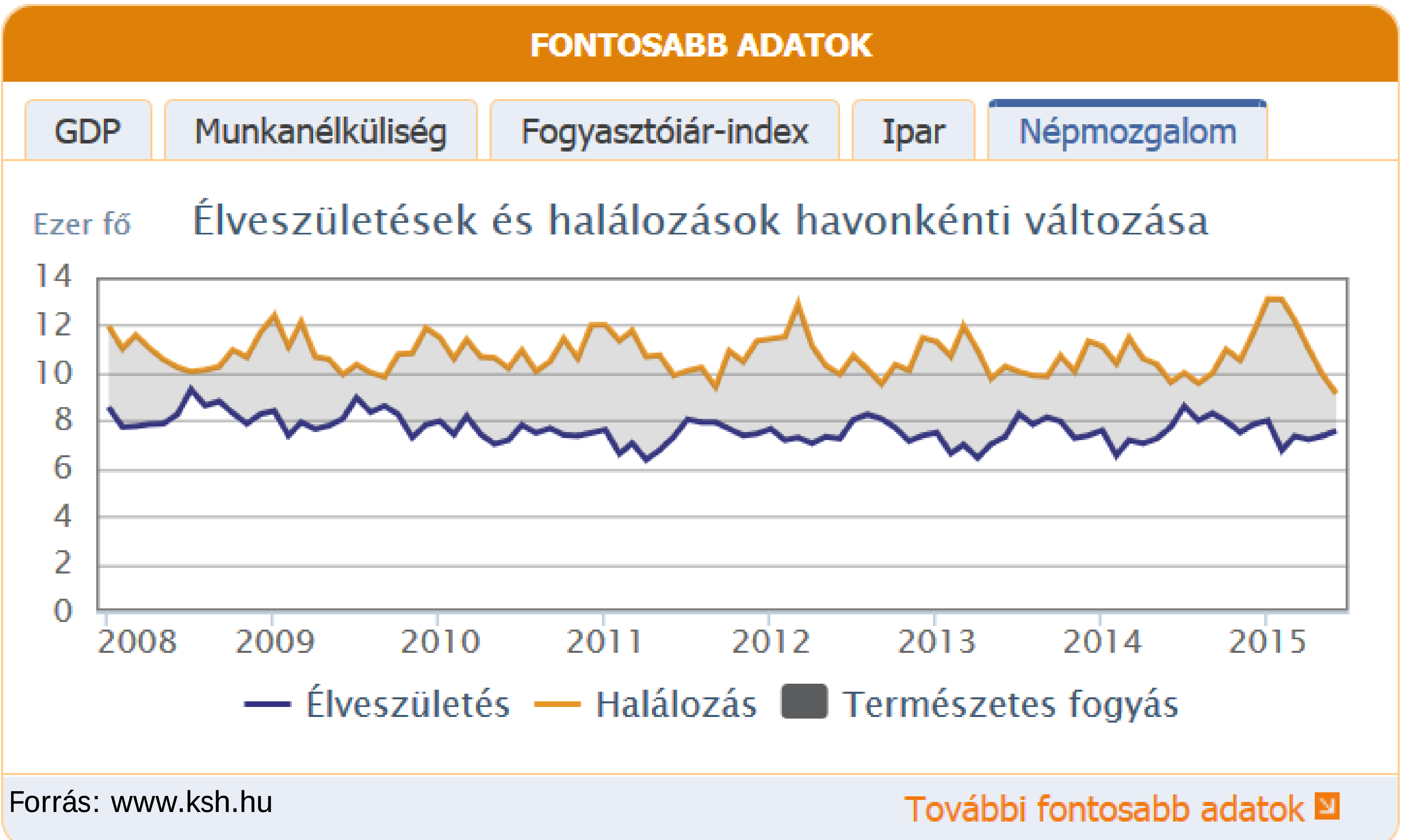
- Egy országban a csecsemőhalandóság függvénye az egészségügyi ellátás minőségének.
- Egy ország nemzeti össztermléke függvénye a beruházások szintjének.
- A kör területe, függvénye a kör sugarának $T = \pi * r$

Példák függvényekre



Forrás: www.ksh.hu

Példák függvényekre



Forrás: www.ksh.hu

Jelölések

Jelölje az X halmaz és az Y a valós számok egy részhalmaza. Minden X-beli x elemhez rendeljük hozzá az Y-beli

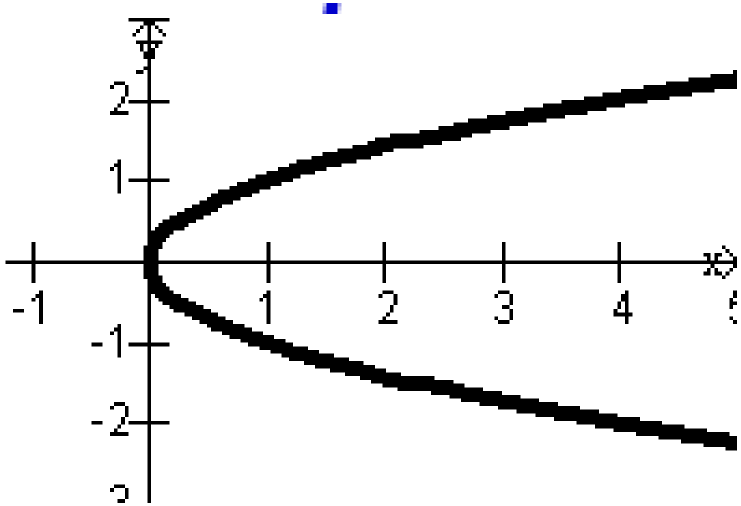
$$y = 1 / (x^2 + 1)$$

értéket. Akkor ezt a függvénykapcsolatot az alábbiak szerint jelölhetjük:

- **$f(x) = 1 / (x^2 + 1)$**
- **$x \mapsto 1 / (x^2 + 1)$**
- **$y = 1 /(x^2 + 1)$**

Példa

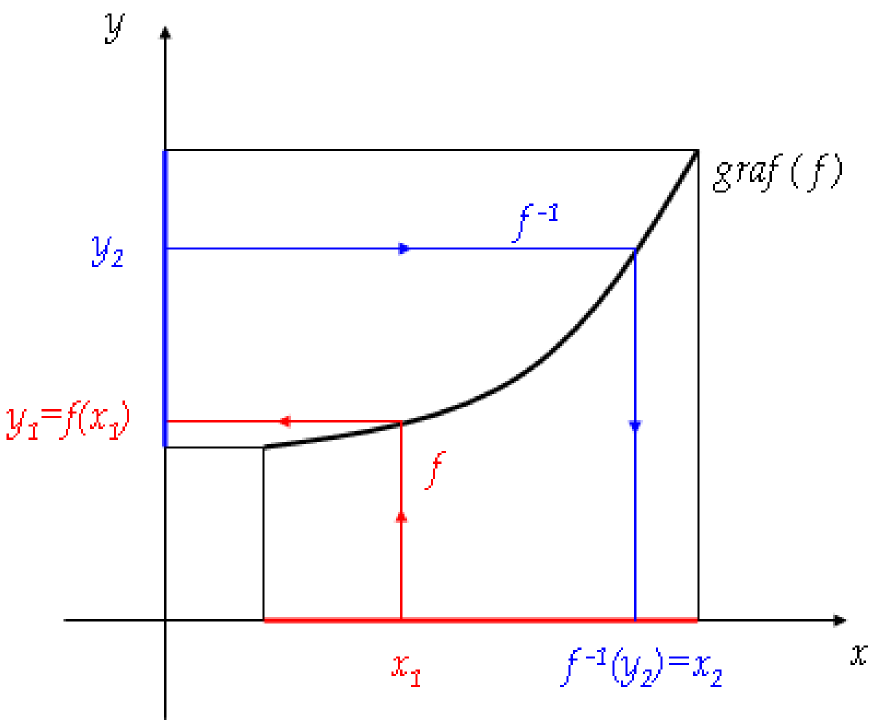
Tekintsük az $y = \pm (x^{1/2})$ hozzárendelést!



Ez meghatároz egy görbét („fekvő parabola”) a koordináta rendszerben, de lévén, hogy sérül az egyértékűség, így ez **nem függvény**!

3.5 Inverz függvény

Az **f függvény invertálható**, ha az **f^{-1}** reláció is függvény. Ekkor az f^{-1}-et az f függvény **inverz függvény**ének nevezzük.



Példa – függvény-e a reláció és ha igen, invertálható-e?

- Tekintsük az $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ és az $Y = \{0, 1, 2\}$ halmazokat. Legyen adott $f = \{ (x,y) \in X \times Y \mid |x| = y \}$ reláció. Az f reláció függvény-e és invertálható-e?

- Tekintsük az $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és az $Y = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazokat. Legyen adott $g = \{(x,y) \in X \times Y \mid x + 1 = y\}$ reláció. A g reláció függvény invertálható-e?

3.5 Kölcsönösen egyértelmű leképezések

Legyen az $f : X \to Y$. Ha $\forall\, y \in Y$ elemre az $f^{-1}(y)$ legfeljebb egy X-beli elemet tartalmaz, akkor ez f-et **kölcsönösen egyértelmű leképezés**nek nevezzük X-ről Y-ba.

Az f kölcsönösen egyértelmű leképezése X-nek Y-ba, ha $f(x_1) \neq f(x_2)$, valahányszor $x_1 \neq x_2$ és $x_1, x_2 \in X$.

Csak a kölcsönösen egyértemű leképezéseknek van inverze!

Példa – inverz függvény meghatározása

1.) Vizsgáljuk meg, hogy az

$$f(x) = 2x^2 - 2$$
$$g(x) = -2/3 * x + 5$$

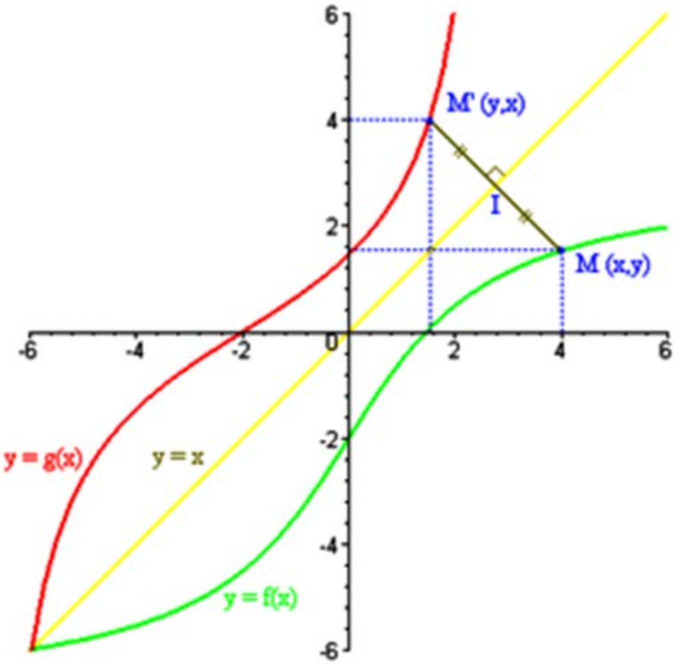
függvénynek van-e inverze, ha van adjuk meg az inverz függvényt és ábrázoljuk a függvényeket!

Megjegyzések

- Legyen adott az $f(x)$ kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés. Az $f(x)$ függvény inverzén azt az $f^{-1}(x)$függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya az $f(x)$ értékkészlete, és ha $f(x)$ az „a" helyen a „b" értéket veszi fel, akkor $f^{-1}(x)$ függvény a „b" helyen „a" lesz.
- A definícióból következően, ha $f(x)$ függvény inverze $f^{-1}(x)$, akkor $f^{-1}(x)$ függvény inverze $f(x)$, továbbá $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$
- Ha $f(x)$ szigorúan monoton növekvő (csökkenő),akkor létezik inverze, és inverze is szigorúan monoton növekvő (csökkenő)

Megjegyzések

- $f^{-1}(x)$ és $f(x)$ görbék az $y = x$ egyenesre vonatkozóan egymás tükörképei



- Az inverz meghatározásánál az $y=f(x)$ egyenletből kifejezzük x-et y-nal, és utána az x és y jelölést felcseréljük.

3.6 Függvény leszűkítése

Legyenek X, Y, Z adott nemüres halmazok, úgy hogy $X \subseteq Y$ és legyen $f : Y \to Z$ adott függvény. Legyen $g : X \to Z$ olyan függvény, melyre $f(x) = g(x)$ minden $x \in X$ esetén. Ekkor a g-t az f X-re vonatkozó **leszűkítés**ének mondjuk.

3.7 Összetett függvény

Adott f, g függvények esetén a **$g \circ f$** kompozíciót **összetett függvény**nek mondjuk.

Ha $f : X \to Y$ és $g : Y \to Z$, akkor

$h = g \circ f : X \to Z$ függvény, melyre

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Példa – összetett függvények

Határozzuk meg a $g \circ f$ függvényt az alábbi f és g függvények esetében:

1.) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ és
$g : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$, $g(x) = 2\, x^{1/2}$

2.) $f : \mathbf{]0,1}[\to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 / 2x$ és
$g :]\, 0,+\infty[\to \mathbf{R}$, $g(x) = 1 / 2x^2$

3.) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - 2x^2$ és
$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1 / (2 + x^2)$

Megjegyzés

- Az $f(x)$ külső függvényből és $g(x)$ belső függvényből álló $F(X) = f(g(x))$ függvényt összetett függvénynek nevezzük, melynek értelmezési tartománya a $g(x)$ értelmezési tartományának azon x_0 pontjai, amelyekre $g(x_0)$ hozzátartozik az $f(x)$ értelmezési tartományához.

- Az $f(g(x))$ összetett függvény létezik, ha

$$R_g \cap D_f \neq \emptyset \text{ és } D_{f(x(x))} = g^{-1}(R_g \cap D_f)$$

3.8 Halmazok számossága

A H és a K halmazok **egyenlő számosságú**ak, ha van olyan $f : H \to K$ invertálható függvény, amelynek értékkészlete a K halmaz.

Jelölés: **H ~ K** (H ekvivalens K-val)

3.8 Véges halmaz fogalma

Azt mondjuk, hogy a H **véges halmaz**, ha vagy üres halmaz, vagy van olyan n pozitív egész, hogy H ekvivalens az {1, 2, 3, ... , n} halmazzal. Az utóbbi esetben azt mondjuk, hogy a H halmaz n elemű, vagy azt, hogy a H halmaz elemeinek száma n.

3.8 Véges és végtelen halmazok

- Azt mondjuk, hogy a H **halmaz végtelen**, ha nem véges.
- A H **halmaz megszámlálhatóan végtelen**, ha ekvivalens a természetes számok halmazával.
- Azt mondjuk, hogy a H **halmaz megszámlálható**, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Köszönöm a figyelmet!