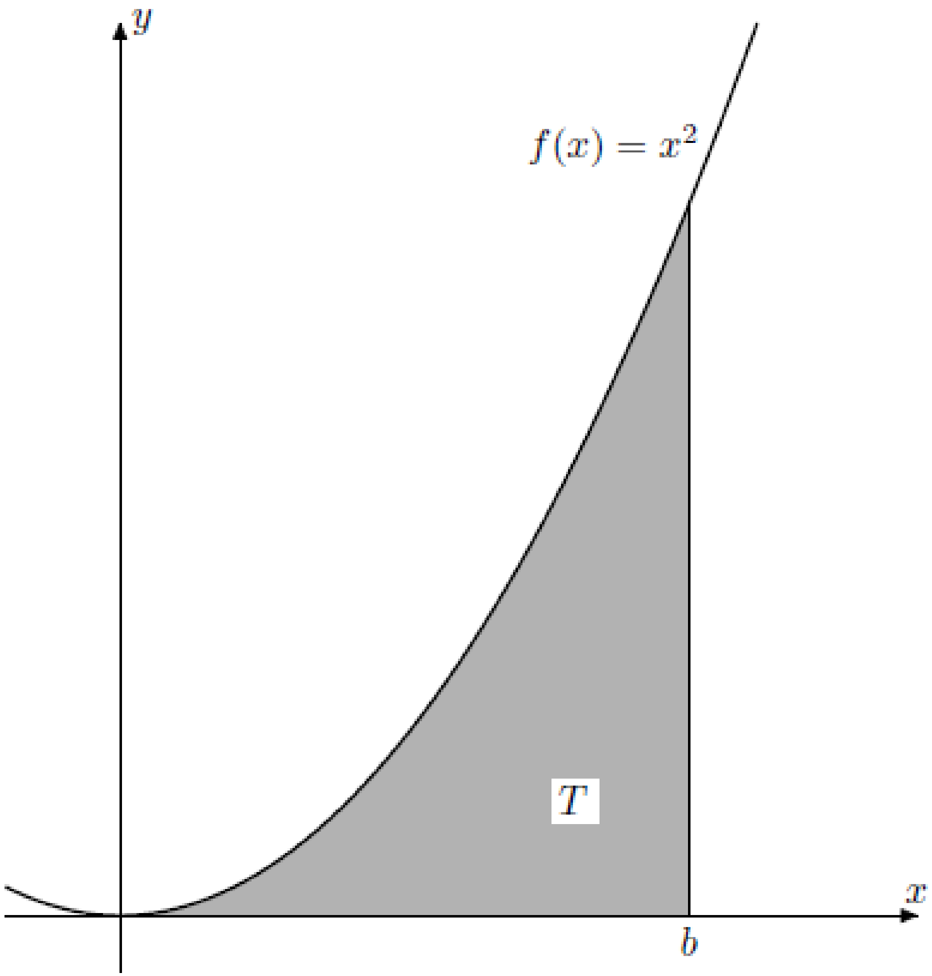
Integrálszámítás

Dr. Vincze Szilvia

16. Határozott integrál és az integrálszámítás alkalmazási területei

Bevezető gondolatok

Határozzuk meg annak a síkidomnak a területét, melyet az $f(x) = x^2$ görbe, az x tengely és az x=b egyenes határol.



Bevezető gondolatok

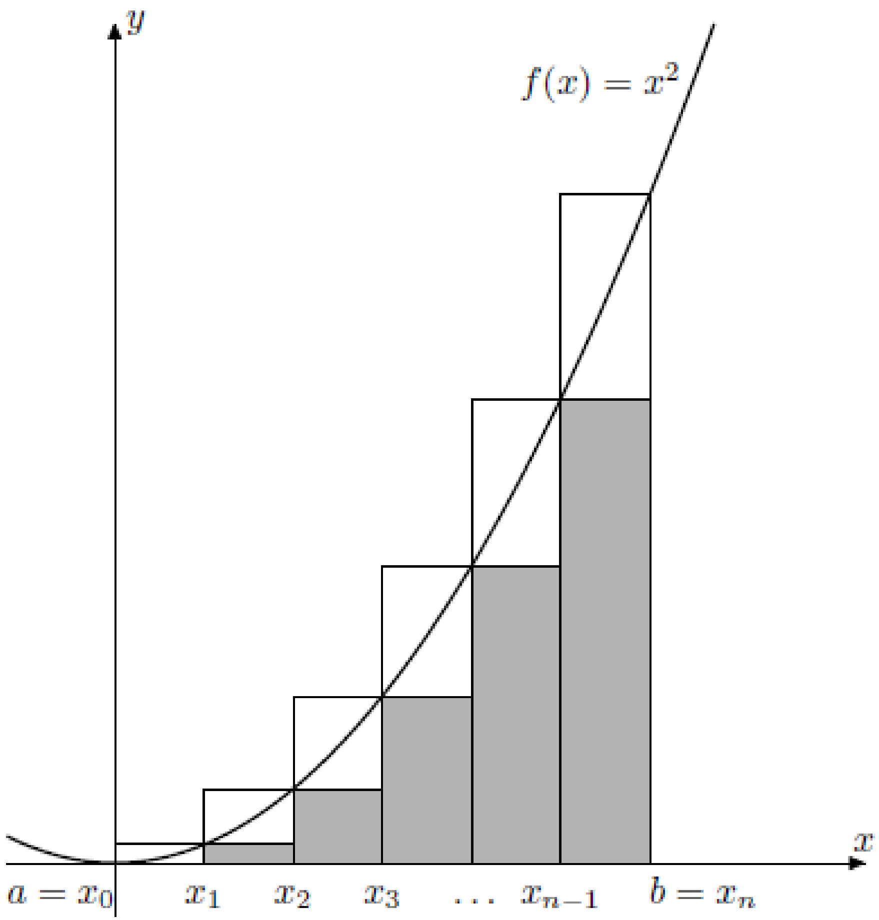
Osszuk fel a [0,b] intervallumot n egyenlő hosszúságú részintervallumokra és az osztópontokat jelöljük a következőképpen:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i \ldots < x_n = b$$

ahol

$$x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \ldots , x_i = \frac{i*b}{n}, \ldots. , x_n = \frac{n*b}{n}$$

Bevezető gondolatok



A keresett terület egy alsó becslését kapjuk, ha minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallum, mint alap fölé olyan téglalapot rajzolunk, amelynek magassága a részintervallum bal végpontjában felvett függvényérték:

$$f(x_{i-1}) = (x_{i-1})^2 = \left(\frac{i-1}{n} * b\right)^2$$

Bevezető gondolatok

A síkidomot egy n lépcsőjű törtvonallal határolt sokszög területével közelítjük meg, melynek területét

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b}{n} \ \underline{\textbf{alapú}}$$

$$\left(\frac{b}{n}\right)^2, \left(\frac{2b}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{(n-1)*b}{n}\right)^2 \ \underline{\textbf{magasságú}}$$

téglalapok területének összege adja, jelöljük s_n-nel.

Bevezető gondolatok

$$s_n = \frac{b}{n}(0)^2 * \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n}\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2$$
$$= \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)$$

$$s_n \leq T$$

$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$ ebből $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)*n*(2n-1)}{6}$

így

$$\boxed{s_n = \frac{b^3}{6} * \left(1 - \frac{1}{n}\right) * \left(2 - \frac{1}{n}\right)}$$

Bevezető gondolatok

A T terület egy felső becslését úgy kapjuk, hogy minden részintervallum fölé a jobb dali függvényértéknek megfelelő magasságú téglalapokat rajzolunk, mely területet jelöljük S_n-nel.

$$\boxed{S_n = \frac{b^3}{6} * \left(1 + \frac{1}{n}\right) * \left(2 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$S_n \geq T$$

Bevezető gondolatok

Ha az n értékét növeljük, azaz a $[0,b]$ intervallumot mind több részre osztjuk, akkor

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} * \left(1 - \frac{1}{n}\right) * \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} * \left(1 + \frac{1}{n}\right) * \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}$$

Mivel,minden n értékre: $s_n \le T \le S_n$, így a T terület csak a közös határérték lehet, azaz $\frac{b^3}{3}$.

16.1 Beosztás, beosztáshoz tartozó alsó és felső összeg

Legyen az $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ az $[a, b]$ intervallum egy **beosztás**a. Jelöljük a beosztást B-vel. A **beosztás finomságá**n a

$$\delta_n = \max_i (x_i - x_{i-1})$$

számot értjük.

16.1 Beosztás, beosztáshoz tartozó alsó és felső összeg

Legyen az $f:[a,b] \to \boldsymbol{R}$ korlátos függvény és a B egy beosztása az $[a,b]$ intervallumnak és

$$m_i = inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$M_i = sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Ekkor az f függvény **B beosztásához tartozó alsó összege** az

$$s(f,B) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i-1}, x_i)$$

B beosztásához tartozó felső összege az

$$S(f,B) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i-1}, x_i)$$

16.1 Beosztás, beosztáshoz tartozó alsó és felső összeg

Az f függvény B beosztáshoz tartozó ζ_i pontokhoz tarozó **integrálközelítő összege**e (**Riemann-összege**e)

$$\sigma(f,B) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) * (x_{i-1}, x_i)$$

Legyen $f:[a,b] \to \boldsymbol{R}$ korlátos függvény és a B, B_1, B_2 egy beosztása az $[a,b]$ intervallumnak. Ekkor:

a.) minden $\sigma(f,B)$-re: $s(f,B) \le \sigma(f,B) \le S(f,B)$

b.) $s(f,B_1) \le S(f,B_2)$, azaz f alsó összege felülről korlátos, f felső összege alulról korlátos

16.2 Darboux-féle integrál

Legyen $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ korlátos függvény. Az

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = sup\{s(f,b)|B\ az\ [a,b]\ beosztása\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = inf\{S(f,b)|B\ az\ [a,b]\ beosztása\}$$

valós számokat az f függvény **Darboux-féle alsó-, ill. felső integrál**jának nevezzük.

16.3 Riemann-integrál

Legyen $f:[a,b]\rightarrow \boldsymbol{R}$ korlátos függvény. Az f függvény Riemann-integrálható, ha

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

ekkor a közös értéket az f függvény **Riemann-integrál**jának nevezzük,

Jele: $\int_a^b f(x)dx$

Megjegyzés

- A Darboux-féle alsó integrál nem más, mint az alsó összegek felső korlátja, a felső integrál pedig a felső összegek pontos alsó korlátja.

- A Riemann-integrál nem más, mint a függvénygörbe és az x tengely közötti előjeles terület.

16.4 Riemann integrálra vonatkozó tételek

- Az $f:[a,b] \to \boldsymbol{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha a B_n minden határon túl finomodó beosztása ($\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$) esetén a $\sigma(f, B_n)$ sorozat konvergens. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (f, B_n)$$

- Minden $f:[a,b] \to \boldsymbol{R}$ monoton, korlátos függvény Riemann-integrálható.
- Minden $f:[a,b] \to \boldsymbol{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.

16.4 Riemann integrálra vonatkozó tételek

- Ha $f, g: [a,b] \to \mathbf{R}$ korlátos és Riemann-integrálható, $\lambda, \mu \in$ **R**, akkor $\lambda * f + \mu * g$ is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b \lambda * f(x) + \mu * g(x)dx = \lambda * \int_a^b f(x)dx + \mu * \int_a^b f(x)dx$$

továbbá ekkor f*g is Riemann-integrálható függvény.

16.4 Riemann integrálra vonatkozó tételek

- Legyen $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ korlátos és Riemann-integrálható, $c \in [a,b]$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

az f Riemann-integrálható $[a,c]$-n és $\in$ $[c,b]$-n is és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

16.4 Riemann integrálra vonatkozó tételek

- Ha $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integrálható és $f(x) \leq g(x)$ minden $\mathrm{x} \in [a, b]$ esetén
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$$
- Ha $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integrálható, akkor $|f(x)|$ is Riemann-integrálható és
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

16.5 Középérték-tételek

- Ha $f, g: [a, b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integrálható, $m, M \in \mathbf{R}$ olyanok, hogy $\mathrm{m} \le f(x) \le M$ és $g(x) \ge 0$ minden $\mathrm{x} \in [a, b]$ esetén, akkor

$$m * \int_{a}^{b} g(x)dx \le \int_{b}^{a} f(x) * g(x)dx \le m * \int_{a}^{b} g(x)dx$$

- Ha $f, g: [a, b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integrálható, $m, M \in \mathbf{R}$ olyanok, hogy $\mathrm{m} \le f(x) \le M$ és $g(x) \ge 0$ minden $\mathrm{x} \in [a, b]$ esetén, akkor

$$m(b-a) \le \int_{b}^{a} f(x)dx \le M(b-a)$$

16.6 Newton-Leibniz formula

- Ha $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ Riemann-integrálható, és $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ az f primitív függvénye, akkor

$$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Példa

Határozza meg a következő integrál értékét:

$$\int_{1}^{2} (2x + 3)dx$$

16.7 Parciális integrálás szabálya

Ha $f, g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvények, akkor

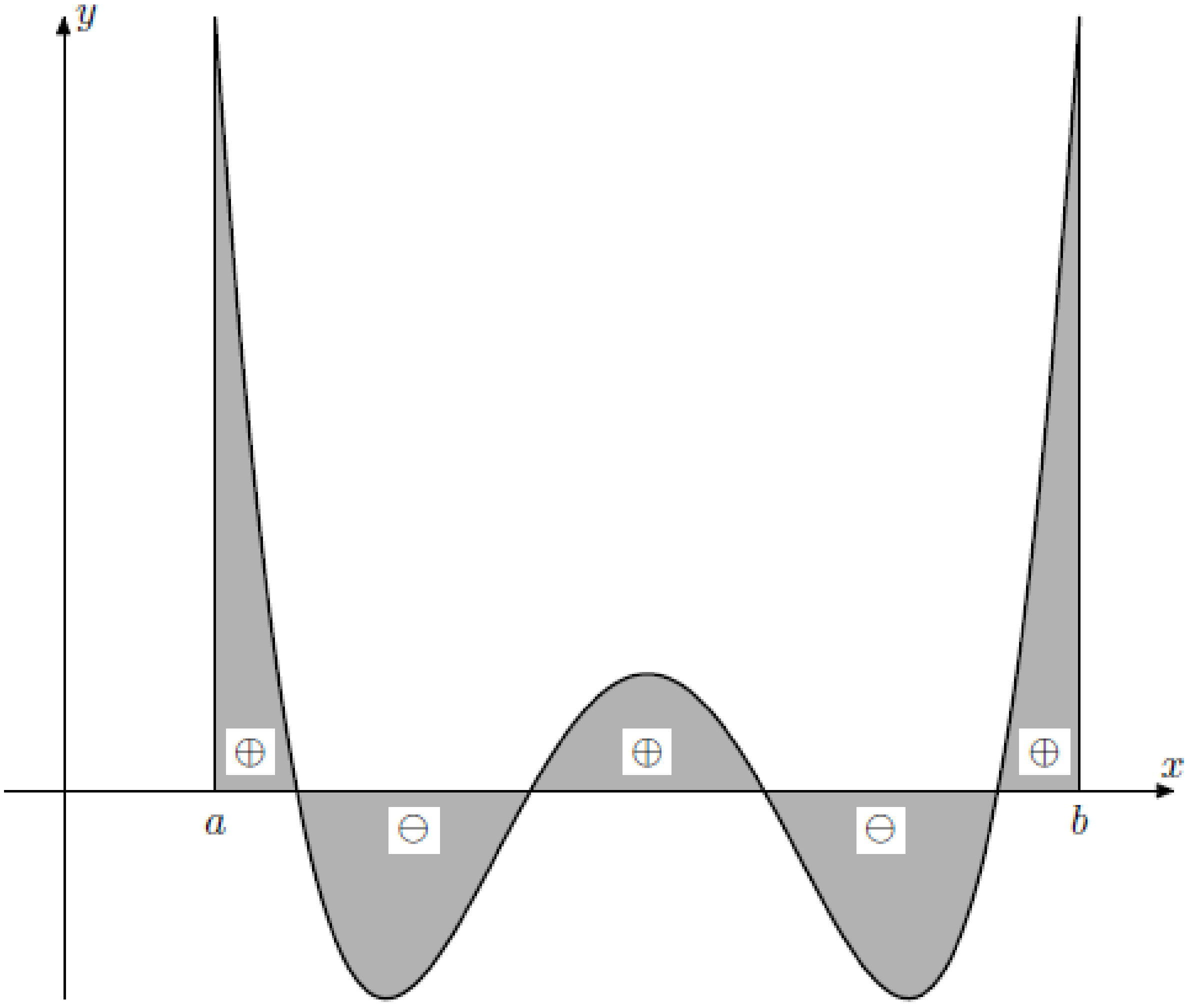
$$\int_a^b f'(x) * g(x)dx = [f(x) * g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) * g'(x)dx$$

16.8 Helyettesítéses integrálás szabálya

Ha $f, g: [a, b] \to [c, d]$ folytonosan differenciálható és $g: [c, d] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = \int_{a}^{b} g(f(t)) * f'(t)dt$$

16.9.1 Az integrálszámítás alkalmazásai: területszámítás

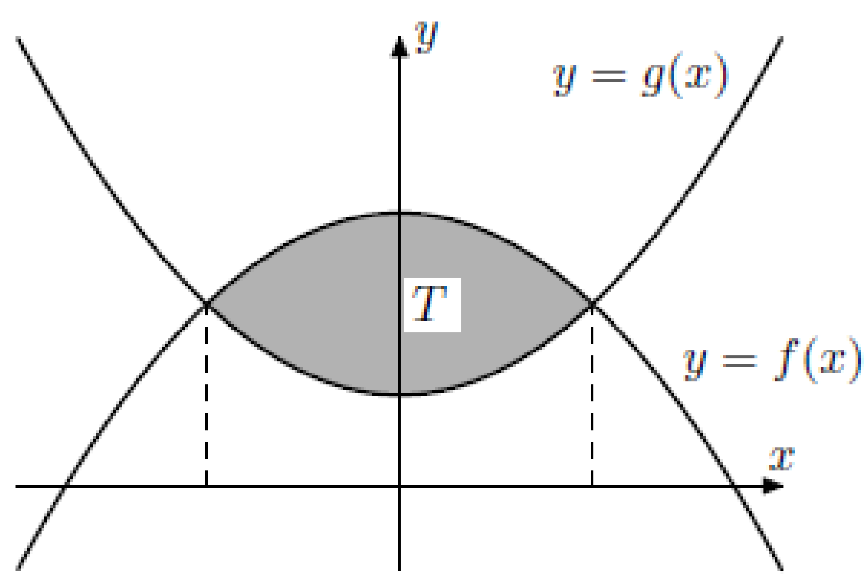


Integrál:
görbe alatti
előjeles
terület

16.9.1 Az integrálszámítás alkalmazásai: területszámítás

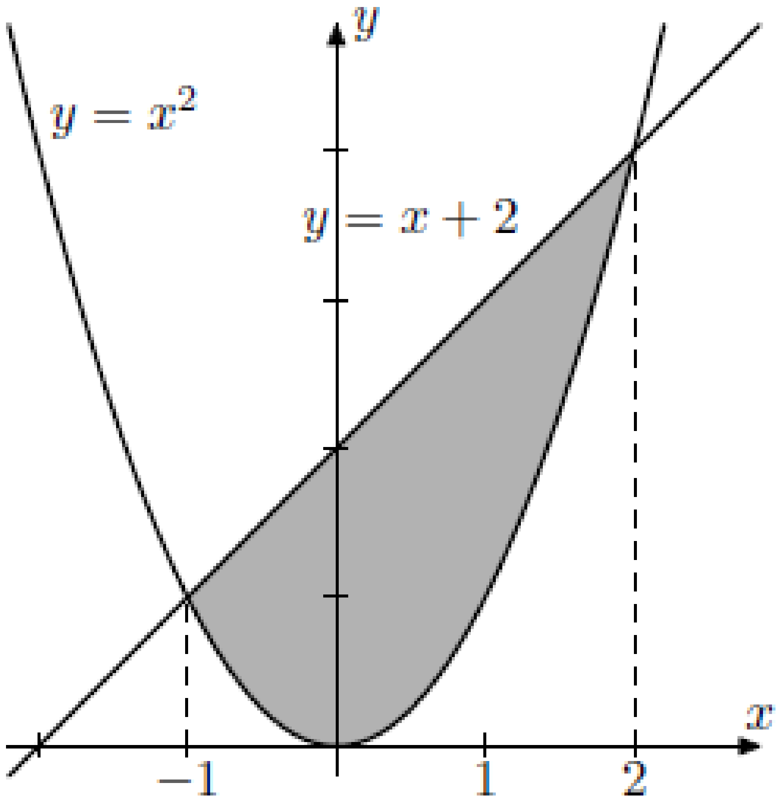
Legyen az f és g függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény, továbbá f(a)=g(a), f(b)=g(b) és $f(x) > g(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén. Ekkor a két függvény által határolt terület:

$$T = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$



Példa

Határozza meg az $y=x^2$ függvény görbe és $y = x+2$ egyenes által határolt területrészt!



16.9.2 Az integrálszámítás alkalmazásai: görbe ívhosszának meghatározása

Tekintsük az f $[a, b]$ -n folytonos függvényt és vegyük az $[a, b]$-nek egy beosztását:

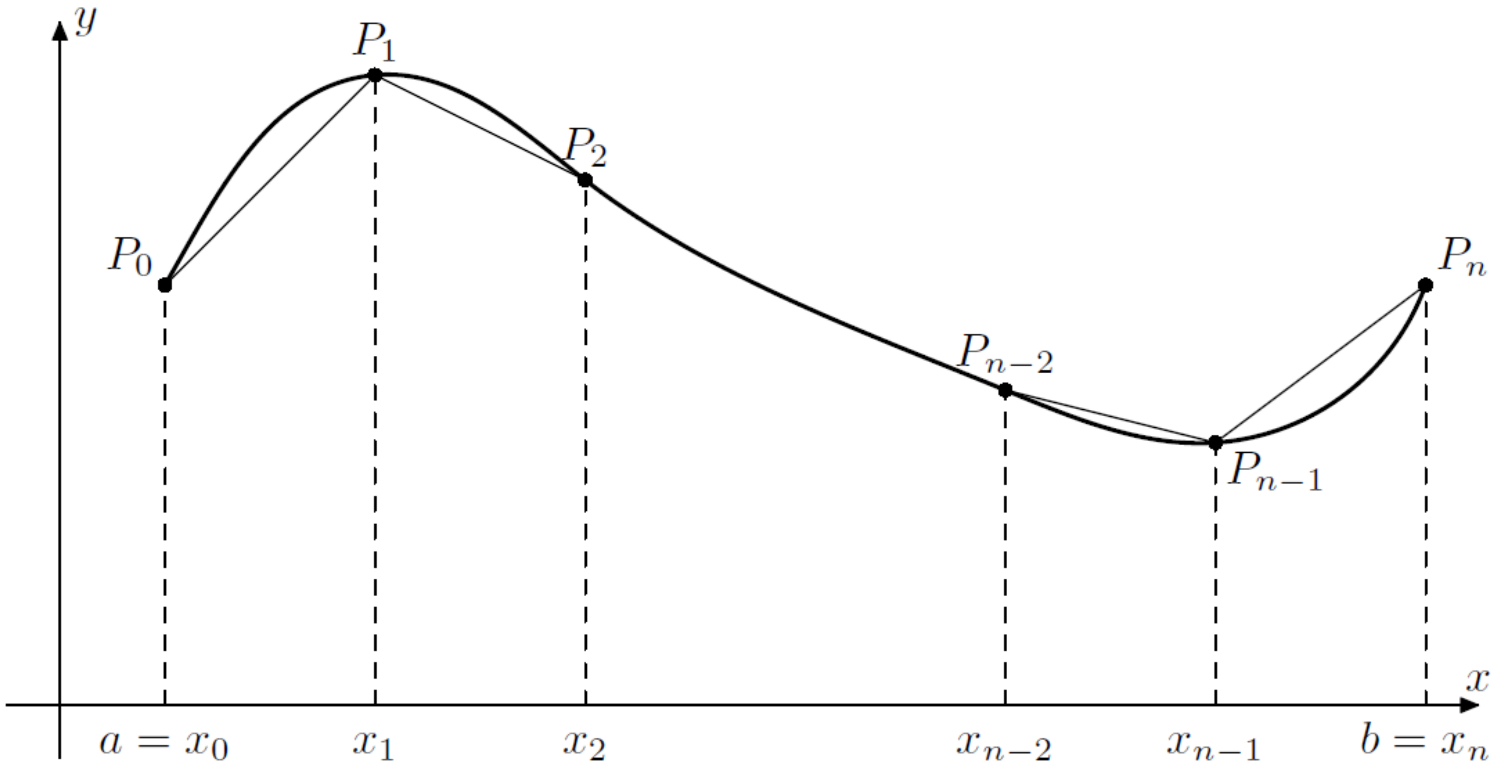
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

valamint, legyen $P_i = (x_i, f(x_i))$, ha i= 0, 1, ... , n. A P_{i-1} és P_i pontok távolságát jelöljük $\overline{P_{i-1}P_i}$ -ve. A

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$$

összeg a P_0, P_1, ..., P_n pontokat összekötő egyenes szakaszokból álló törött-vonal hosszát jelenti.

16.9.2 Az integrálszámítás alkalmazásai: görbe ívhosszának meghatározása



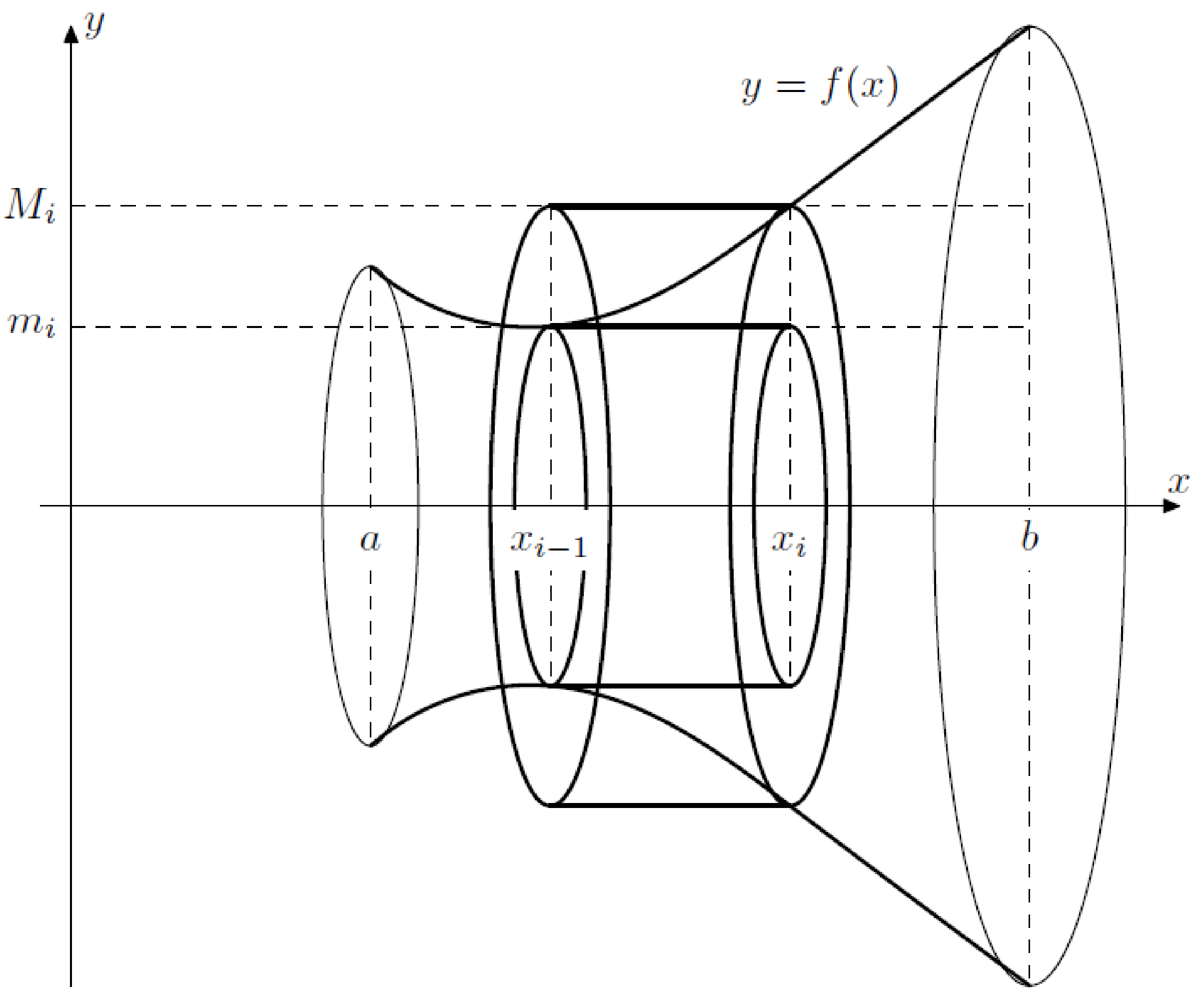
Ha a beosztást finomítjuk, akkor ez az összeg mindig ugyanazon a véges határértékhez tart. Ezt a határértéket tekintjük az f függvény $[a, b]$ -hez tartozó **ívhossz**ának.

16.9.2 Az integrálszámítás alkalmazásai: görbe ívhosszának meghatározása

Ha az f $[a, b]$ -n differenciálható, valamint f’ folytonos azon az intervallumon, akkor az f függvény $[a, b]$ -hez tarozó ívhossza:

$$S = \int_a^b \sqrt{(1 + f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

16.9.4 Az integrálszámítás alkalmazásai: térfogatszámítás



Az xy koordinátasíkban fekvő valamely folytonos görbét forgassuk meg az x tengely körül.

16.9.4 Az integrálszámítás alkalmazásai: térfogatszámítás

Ha az f függvény az $[a,b]$-n és $f(x) \geq 0$, akkor az f grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{dx}$$

Köszönöm a figyelmet!