1 Ellenőrző kérdések

1. Definiálja a differencia- és a differenciálhányados fogalmát és adja meg ezek geometriai jelentését!
2. Hogyan deriváljuk az f+g függvényt az x_0 pontban, ha az f és g függvény is differenciálható x_0-ban?
3. Hogyan deriváljuk az f*g függvényt az x_0 pontban, ha az f és g függvény is differenciálható x_0-ban?
4. Hogyan deriváljuk az f/g függvényt az x_0 pontban, ha az f és g függvény is differenciálható x_0-ban?
5. Adja meg az elemi függvény deriválási szabályát.
6. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak ill. hamisak.
   a) A differenciahányados geometriailag két ponton átmenő szelő meredeksége.
   b) Ha az f függvény differenciálható az értelmezési tartományának x_0 pontjában, akkor ott folytonos is.
   c) Ha az f függvény folytonos az értelmezési tartományának x_0 pontjában, akkor ott f_0 differenciálható is.

2 Példák

1. Határozza meg az alábbi függvények első derivált függvényét:

$$a)\ f(x)=6x^2+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}-\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}+\log_5 8-2\log_3 x \quad b)\ g(x)=\frac{\sin x}{4x^3-6} \quad c)\ h(x)=e^x\cdot\ln x$$

$$d)\ i(x)=\frac{2\cos(x^3+2x)}{x^2+6x+3} \quad e)\ j(x)=\sin\sqrt{10x^4+3x^2}$$

Megoldások:

$$a)\ f'(x)=\left(6x^2+3x^{-\frac{1}{4}}-x^{\frac{5}{3}}+\log_5 8-2\log_3 x\right)'=12x+3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{5}{4}}+0-2\frac{1}{x\cdot\ln 3}=$$

$$=12x-\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{4}}-\frac{2}{x\cdot\ln 3}$$

$$b)\ g'(x)=\frac{\cos x\cdot\left(4x^3-6\right)-\sin x\cdot 12x^2}{\left(4x^3-6\right)^2} \qquad c)\ h'(x)=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}$$

$$d)\ i'(x)=\frac{-2\sin\left(x^3+2x\right)\cdot\left(3x^2+2\right)\cdot\left(x^2+6x+3\right)-2\cos\left(x^3+2x\right)\cdot\left(2x+6\right)}{\left(x^2+6x+3\right)^2}$$

$$e)\ j'(x)=\cos\sqrt{10x^4+3x^2}\cdot\frac{1}{2}\left(10x^4+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(40x^3+6x\right)$$

2. Határozza meg az $f(x) = 2x^2$ függvénynek az $x_0 = 1$ helyhez tartozó differenciahányados függvényét, majd vizsgáljuk meg, hogy f(x) differenciálható-e az x_0-ban (adjuk meg az $x_0 = 1$ helyhez tartozó differenciálhányadost).

Megoldás:

(1) $d(x) = \dfrac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{2x^2 - 2}{x - 1} = \dfrac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x - 1} = 2x + 2,\ x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$

(2) A $d(x) = 2x + 2$ függvénynek van véges határértéke az $x_0 = 1$ helyen, így a differenciálhányados: $\lim\limits_{x \to 1} 2x + 2 = 4.$

3. Tekintse az $f(x) = |x|$ függvényt és vizsgáljuk az $x_0 = 0$ helyen folytonosság és a differenciálhatóság tekintetében. Mutassuk meg, hogy folytonos a függvény a 0-ban, de ott mégsem differenciálható.

Megoldás:

A függvény grafikonját a *9. ábra* mutatja be. A függvény az értelmezési tartománya (**R**) minden helyén folytonos, így a 0-ban is, mivel a helyettesítési érték megegyezik a határértékkel (a bal és jobb oldali határértékeket számítva mindkét esetben 0-t, kapunk). A 0 helyen a differenciálhányados:

$$d(0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0, \\ -1 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy a differenciahányadosnak a 0 pontban nincs határértéke, hiszen a jobb és bal oldali határérték nem egyezik meg, mivel

$$\lim_{x \to 0+0} d(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0-0} d(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{-(x)}{x} = -1.$$

Tehát a függvénynek a 0 helyen nem létezik a deriváltja, nem differenciálható.

3 Gyakorló feladatok

3.1 Deriválás gyakorlása

1. Deriválja az alábbi függvényeket!

$y = \dfrac{3x^2 + 2x^3}{\sqrt{x}}$

$y = \dfrac{5\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}}{x^2}$

$y = \dfrac{1}{x^6}$

$y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

$y = \sqrt[3]{x}$

$y = \dfrac{2x^2 + 3x}{4x - 6}$

$y = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$

$y = \dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x} + 2}$

$y = x^4 \cdot \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x}\left(5x - x^2\right)$

$y = \dfrac{x^4}{\sqrt[3]{x}}$

$y = \sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{21}}}$

$$y=\frac{3x}{4x-2}\cdot\frac{6\sqrt{x}}{5x^2-3}$$

$$y=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}$$

$$y=(3x+7)^2$$

$$y=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}$$

$$y=e^{5x}\cdot\cos x$$

$$y=5x^6+4x^4-3x^3$$

$$y=6^{\operatorname{tg}x}\cdot\cos x$$

$$y=3x\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt[6]{x}}+2$$

$$y=5\cdot\ln x+3\cdot\ln x$$

$$y=\left(5x^3+4x^2+1\right)^{-3}$$

$$y=\ln(3x+4)$$

$$y=\left(5x^2-3\right)^4\cdot\sqrt{4x+6}$$

$$y=\ln\frac{5x}{4x-3}$$

$$y=\sqrt[3]{\left(3x^2+2x\right)^2}$$

$$y=\ln\frac{\sqrt{2x+1}}{\sin x}$$

$$y=2\cdot\sin x-3\cdot\cos x$$

$$y=e^{2x}\ln 2x$$

$$y=5\cdot\operatorname{tg}x-2\cdot\operatorname{ctg}x$$

$$y=\log_5\left(6x^2-4\right)$$

$$y=\sqrt{x}\cdot\sin x$$

$$y=5\cdot\sin x\cdot\cos x$$

$$y=\operatorname{tg}(\sin 5x)$$

$$y=\sqrt{x^2-3}\cdot\cos^2 6x$$

$$y=\sin\left(6x^2-3x+2\right)$$

$$y=\sin\frac{x}{x^2-1}$$

$$y=\sqrt{\cos\sin 6x^2}$$

$$y=5e^x-3e^{2x}$$

$$y=e^{x^2}+e^{\cos x}-e^{2x+3}$$

$$y=a^{7x}+\frac{1}{2}a^{-x}+a^{2x}$$

3.2 Derivált fogalma, jelentése

1. Milyen szögben metszik az X tengelyt a következő görbék?

   a) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

   b) $y = x^4 - 1$

   c) $y = (x-1)^3$

2. Legyen $f(x) = 4 - 5x + 2x^3 - x^5$. Igaz-e, hogy $f'(a) = f'(-a)$?

2. Határozza meg az $y = x^2$ függvény $x_0 = 3$ abcisszájú pontjához húzott érintő egyenletét!

3. Adja meg az $y = 4x^2 + 5$ függvény $x_0 = 3$ abcisszájú pontjához húzott érintő egyenletét!

4. Differenciálja a derivált fogalmának felhasználásával az

   a) $f(x) = 2x^3 - x + 5$

   b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$

5. Írja fel az $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ görbe $(-2{,}5)$ pontjához tartozó érintő egyenletét!

6. Adja meg az $f(x) = \sqrt{x}$ görbe érintőjének az egyenletét az $x_0 = 4$ abcisszájú pontban!

7. Határozza meg az $f(x) = 2x^2 - 2x$ parabola és az $f(x) = 1 - x$ egyenes metszéspontjaiban a parabolához tartozó érintők egyenletét!

8. Az $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ függvény képe parabola. Írja fel az $x = 1$ abcisszájú pontjában az érintő egyenletét!

3.3 Összetett függvények deriválása

1. Végezze el a következő függvények deriválását!

   a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) + x^3 \cdot 5^{-x^2+6x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

   b) $f(x) = \sin(5x^2 - 3x + 2) \cdot 7^{\frac{\cos x}{\sin x} + x^2} - \left(\dfrac{1}{(x^2 - 5x + 3)^2} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \cdot e^{-x^2}$

   c) $f(x) = \dfrac{\ln(7x-5)}{\cos(5x-3)} + \left(\sqrt[3]{x^2} + (x^2+2)^3\right) \cdot 4^{-\cos(5x+3)}$

d) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5x-3}{2x}\right)+\dfrac{e^{5x}\cdot\sqrt{x^3}}{\ln\dfrac{1}{x}}-\left((7x-8)^{-3}+\dfrac{2}{\left(-5x^2+3x\right)}\right)\cdot 6^{-x^3\cdot\cos x}$

e) $f(x)=\left(\dfrac{7x^2-3x+5}{x^4}-\sqrt[3]{x}\right)\cdot e^{-\operatorname{tg}(5x-3)}+\dfrac{3}{5^{-\sin(2x^2+3x-5)}}-\ln\left(\dfrac{x^3-2x+5}{x}\right)$

f) $f(x)=\dfrac{\cos(7x^2-9x+3)}{\sqrt[5]{9x^2-4x+6}}+\left(3-\dfrac{5}{\sin(7x-8)}\right)\cdot 5^{\cos 7x}$

g) $f(x)=\dfrac{e^{5x^2-4x+3}\cdot\cos 7x}{\ln\dfrac{9x^2-4x+3}{5x^2-10x}}+\sqrt[3]{9x^2-4x+3}\cdot 6^{\sqrt{x^2-4x}}$

h) $f(x)=\ln(x^3-2x^2)\cdot 3^{x^2}+(\sqrt{x^3+6x^2+34}-\cos x)\cdot\sin(3x-8)+\dfrac{\ln(5x^2-12x)}{x^2+\sin(3x^2+6x)}$

i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[7]{6x^2-4x+3}}\cdot\ln\sqrt{x^2-4x}+\dfrac{\operatorname{tg}(7x+6)\cdot e^{-\sin(4x+3)}}{5^{\operatorname{tg}x}}$

j) $f(x)=\dfrac{5\cos\left(4x^2-7x+6\right)}{e^{-x^2+6x}\cdot\sqrt[7]{x}}+\left[(3x+4)^4+\dfrac{3}{\sqrt[2]{x-7}}\right]\cdot 8^{\sqrt{x^2+2x}}$

k) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}-\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{x^5}}\right)\cdot\ln(5x+5)-\dfrac{\operatorname{ctg}(3x^2+5x-5)}{\ln x^2}+\operatorname{ctg}(9x^5-7x^2+3)$

3.4 Magasabb-rendű deriváltak

1. Határozza meg a következő függvények magasabb-rendű deriváltjait!
   - a) $y=x^5-2x^3+1$ $\quad y^{(5)}=?$
   - b) $y=x^3-8x+2$ $\quad y^{(4)}=?$
   - c) $y=\sqrt[4]{x^3}$ $\quad y'''=?$
   - d) $y=x^4\cdot\ln x$ $\quad y'''=?$
   - e) $y=2^{5x}$ $\quad y'''=?$
   - f) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$ $\quad y'''=?$
   - g) $y=x^2\cdot e^{2x}$ $\quad y^{(5)}=?$
   - h) $y=e^x\cdot\sin x$ $\quad y^{(4)}=?$
2. Legyen $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. Számítsa ki a függvény ötödik deriváltját!
3. Határozza meg az $y=x^2\cdot e^x$ függvény tizedik deriváltját! Számítsa ki a századik és az n-edik deriváltját is!

4. Igazolja, hogy az $y = x + \sin 2x$ függvény kielégíti az $y'' + 4y = 4x$ differenciálegyenletet!
5. Bizonyítsa be, hogy az $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{2}$ függvény kielégíti az $1 + \left(y'\right)^2 = 2yy''$ differenciálegyenletet!
6. Legyen $f(x) = (2x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$. Határozza meg az $f'(-1)$-et és az $f''(0)$-t!