DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA 1

1 Ellenőrző kérdések

1. Mikor mondjuk, hogy egy függvény kétszer differenciálható?
2. Mit értünk magasabbrendű deriváltak alatt?
3. Milyen kapcsolat van a függvény elsőrendű deriváltja és monotonitása között?
4. Milyen kapcsolat van a függvény másodrendű deriváltja és a monotonitása között?
5. Mi az a L' Hospital szabály, mire alkalmazzuk?

2 Példák

1. Határozza meg a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}$ határértéket.

Megoldás:

A számláló és a nevező határértéke egyaránt végtelen, így a kifejezés $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan alakú. Alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\cdot\ln 2}.$$

A tört még most is $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, ismét alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\cdot\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2^x\cdot(\ln 2)^2}.$$

A számláló véges, a nevező határértéke végtelen, így a tört határértéke 0, azaz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=0.$$

2. Határozza meg a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x+6}{6x^3+2x-3}$ határértéket.

Megoldás:

A számláló és a nevező határértéke egyaránt végtelen, így a kifejezés $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan alakú. A L'Hospital-szabályt ismét alkalmazva újból $\frac{\infty}{\infty}$ alakú törthöz jutunk, így a szabályt újra alkalmazni kell. Összesen háromszor alkalmazva a L'Hospital-szabályt végül eljutunk a határértékhez, ami véges lesz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x+6}{6x^3+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-5}{18x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{18x}{36x}=\frac{1}{2}.$$

3. Tegyük fel, hogy egy gép vételára 1.200.000 Ft. A gép értéke az idő múlásával csökken, „t” idő alatt az eredeti vételárának $f(t)=\frac{50}{t+50}$-szeresére. A fenntartási költségek időfüggvénye $g(t) = 400t^2$. Állapítsuk meg, hogy hány évig érdemes a traktort üzemeltetni.

Megoldás:

Egy gépet addig érdemes üzemeltetni, amíg átlagos használati költsége minimálissá nem válik. Esetünkben az átlagos használati költségfüggvény legyen:

$$K(t)=\frac{1}{t}\cdot\left[1{,}2\cdot10^6\cdot\left(1-\frac{50}{t+50}\right)+400t^2\right].$$

Ennek a költségfüggvénynek kell tehát a minimumát meghatározni. Szélsőértéke ott lehet a függvénynek, ahol K’(t) = 0. Az alábbi egyenletet kell tehát megoldanunk:

$$-\frac{1}{t^2}\cdot\left[1{,}2\cdot10^6\cdot\left(1-\frac{50}{t+50}\right)+400t^2\right]+\frac{1}{t}\cdot\left[1{,}2\cdot10^6\cdot\frac{50}{(t+50)^2}+800t\right]=0$$

$$\frac{1}{t}\cdot\left[1{,}2\cdot10^6\cdot\frac{50}{(t+50)^2}+800t\right]-\frac{1}{t^2}\cdot\left[1{,}2\cdot10^6\cdot\left(1-\frac{50}{t+50}\right)+400t^2\right]=0$$

$$\left[1{,}2\cdot10^6\cdot\frac{50}{(t+50)^2}+800t\right]-\frac{1}{t}\cdot\left[1{,}2\cdot10^6\cdot\left(1-\frac{50}{t+50}\right)+400t^2\right]=0$$

$$1{,}2\cdot10^6\cdot\frac{50}{(t+50)^2}+800t-\frac{1}{t}\cdot1{,}2\cdot10^6+\frac{1}{t}\cdot1{,}2\cdot10^6\,\frac{50}{t+50}-\frac{400t^2}{t}=0$$

A fenti egyenletet $t\cdot(t+50)^2$-nel beszorzva az összevonások után:

$400t^4+40000t^3-200000t^2=0$, amelyből, mivel $t\neq 0$ $t^2+100t-500=0$ adódik.
A kapott két gyök közül a negatív nem megoldás, így t = 4,8 év.

	0 < t < 4,8	t = 4,8	4,8 < t
f’	-	0	+
f	↘	MIN	↗
	konvex		

3 Gyakorló feladatok

3.1 Függvények monotonitásának vizsgálata

1. Értelmezési tartományuk mely szakaszán növekedők ill. csökkenők az alábbi függvények?
   a) $f(x)=x^3-3$
   b) $f(x)=x^3+3$
   c) $f(x)=(x-3)^3$
   d) $f(x)=4x^2-4x-5$
   e) $f(x)=x^3-x$
   f) $f(x)=x^4-6$
   g) $f(x)=x^3-6x^2+7$
   h) $f(x)=x^3+3x^2+3x+8$
   i) $f(x)=x^2-4x+3$
   j) $f(x)=x+3x^2$
   k) $f(x)=\sqrt{x+3x^2}$
   l) $f(x)=x^3+6x^2-15x+2$

m) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

n) $f(x) = (2 - x) \cdot (x + 1)^2$

o) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

p) $f(x) = x\left(1 + \sqrt{x}\right)$

q) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

r) $f(x) = \dfrac{2 - 5x}{3x + 4}$

s) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

t) $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$

u) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 4}$

3.2 Szélsőérték-számítás

1. Vizsgálja meg, hogy a következő függvényeknek van-e szélsőértékük, s ha van, melyek azok? Egyben határozza meg azokat az intervallumokat is, amelyeken a függvény monoton!

$y = x - x^2$ $\qquad y = x - x^3$ $\qquad y = x^2 - x^4$

$y = x + \dfrac{1}{x}$ $\qquad y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ $\qquad y = x \cdot \ln x$

3.3 Konvexitás

1. Határozza meg, hogy van-e inflexiós pontja az alábbi függvényeknek?

   a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 17$

   b) $f(x) = \dfrac{x^4}{5} + 2x^2 - x + 3$

   c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 10x - 10$

   d) $f(x) = (x - 7)^3$

   e) $f(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)$

2. Határozza meg, hogy mely intervallumokon konvexek ill. konkávak az alábbi függvények!

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 4$

   b) $f(x) = 5x^3 + 14$

   c) $f(x) = x^5 + 5x - 6$

   d) $f(x) = x^5 + 5x^4 - 6$

3. A következő függvényeknél vizsgálja meg, hogy mely intervallumokon konvex ill. konkáv a függvény. Határozza meg a függvények inflexiós pontjainak a koordinátáit.
   a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$
   b) $y = 1 + (x-1)^4$
   c) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$
   d) $y = e^x - e^{-x}$
   e) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 4$
   f) $y = 3x^7 + 5x - 1$
   g) $y = (x+1)^4$
   h) $y = -5x^2 + x - 4$
   i) $y = \dfrac{1}{x+3}$
   j) $y = \dfrac{1}{1-x}$
   k) $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$
   l) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

3.4 Határérték-számítás L'Hospital szabály segítségével

1. Határozza meg az alábbi függvényéke határértékét!

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{x^2-5x+6}$ (-2)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{2x^3+x}$ (1)

$\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg} 5x}$ (-3/5)

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ (0)

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^3-5x^2+6x}$ (0)

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^2}{e^{2x}}$ (0)

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^4+6x^2-6x-2}{x^4+6x^2-8x+1}$ (7/4)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ (2)

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3+6x^2-6x-2}{x^4+6x^2-8x+1}$ (3/2)

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3+3x^2-36x+44}{3x^2-12x+12}$ (5)

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{3x^5-2x^2+5x-6}$ (3/16)

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2}{e^{2x}}$ (0)

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x^2}{x^3}$ (0)

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2-4x+3}$ (∞)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (1/2)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (1/2)