1 Ellenőrző kérdések

1. Definiálja az egyváltozós valós függvény fogalmát.
2. Hogyan lehet szemléltetni az egyváltozós valós függvényeket?
3. Derékszögű koordináta rendszerben milyen kapcsolat van a függvény és inverze között?
4. Milyen műveleteket értelmezünk két egyváltozós valós függvény között, hogyan értelmezzük ezeket?
5. Mit nevezünk egy adott függvény zérushelyének?
6. Mi a zérushely geometriai jelentése?
7. Mi az az n-ed fokú polinom-függvény (röviden polinom)?
8. Mit tud mondani egy polinom zérushelyeinek számáról?
9. Milyen módszerekkel lehet megkeresni egy polinom zérushelyeit?
10. Ismertesse a Horner-elrendezés lényegét.
11. Mit jelent az intervallum felezés módszere?
12. Mikor mondjuk, hogy egy függvény korlátos?
13. Mikor mondjuk, hogy egy függvény monoton? Mikor mondjuk, hogy egy függvény egy adott intervallumon (szigorúan) monoton nő? Mikor mondjuk, hogy egy függvény egy adott intervallumon (szigorúan) monoton csökken?
14. Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvénynek az értelmezési tartományának egy pontjában abszolút maximuma, ill. minimuma van?
15. Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvénynek az értelmezési tartományának egy pontjában helyi maximuma, ill. minimuma van?
16. Mikor mondjuk, hogy egy függvény konvex, ill. konkáv?
17. Mit nevezünk egy adott függvény inflexiós pontjának?
18. Mi az inflexiós pont geometriai jelentése?
19. Mit jelentenek a következők egy függvénnyel kapcsolatban: periodicitás, párosság, páratlanság?
20. Adjon meg páros függvényt és ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben.
21. Adjon meg páratlan függvényt és ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben.

2 Példák

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ függvény zérushelyeit!

Megoldás:

Ez a függvény egyszerűen felírható a következő alakban:

$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, amelyből könnyen leolvasható, hogy az $x_1 = -4$ és az $x_2 = 1$ pontok a zérushelyek. Ezek a zérushelyek megkereshetők a másodfokú egyenlet megoldóképletével is, most azonban Horner elrendezéssel fogjuk megkeresni a megoldásokat. A megoldásokat -4 osztói között célszerű keresnünk (a nulla, -3, 3 nem osztói a -4-nek).

x	1	3	-4
-4	***1***	***-1***	***0***
-2	1	1	-6
-1	1	2	-6
1	***1***	***4***	***0***
2	1	5	6
4	1	7	24

Tehát f(-4) = 0 és f(1) = 0, azaz a -4 és az 1 helyen zérushelye van f(x)-nek.

2. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!
   a) f(x) = ln(1 – x). *Megoldás*: a logaritmus függvény változója pozitív valós szám (>0), vagyis 1-x > 0 $\Rightarrow$ x <1 és $x \in R$.
   b) $g(x) = x^2 - 2$. Megoldás: x-re semmi kikötés nincs, $x \in R$
   c) $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Megoldás: a nevezőben nem állhat 0, mivel 0-val való osztást nem értelmezünk $\Rightarrow$ $x - 1 \neq 0$, így $x \neq 1$, $x \in R$
   d) $y = \sqrt{1-x^2}$. Megoldás: a négyzetgyök alatt csak 0, vagy annál nagyobb valós szám állhat $\Rightarrow$ $1 - x^2 \geq 0$, így $1 \geq x^2$. Ebből: $-1 \leq x \leq 1$, $x \in R$.

3. Jellemezze az $f(x) = \sqrt{x+5} - 3$ függvényt.

Megoldás:

- Értelmezési tartomány: $D_f = \{x \mid x \in R, x \geq -5\}$
- Értékkészlet: $R_f = \{y \mid y \in R, y \geq -3\}$
- Zérushely: az $y = f(x) = \sqrt{x+5} - 3 = 0$ egyenletet megoldva adódik, hogy x = 4 .
- Korlátosság: mivel az értékkészlet alulról korlátos, ezért a függvény is alulról korlátos, alsó korlátja a -3. Mivel felülről nem korlátos a függvény, így nem mondható korlátosnak.
- Monotonitás: szigorúan monoton növekvő a $[-5,\infty[$ intervallumon.
- Szélsőérték: mivel a függvény alulról korlátos és alsó korlátját fel is veszi, ezért alsó korlátja egyben globális minimum is, helye : x = -5, értéke : y = -3 .
- Konvexitás: a függvény konkáv az egész értelmezési tartományon, ez az elméleti részben tárgyaltakból következik.
- Inflexiós pont: nincs.
- Paritás: a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3 Gyakorló feladatok

3.1 Függvények értelmezési tartománya, értékkészlete

1. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

$y = x^2 - 2$	$y = \dfrac{1}{x-1}$	$y = \dfrac{1}{2-x^2}$
$y = \dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$	$y = \sqrt{1-x}$	$y = \sqrt{1-x^2}$
$y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$	$y = \dfrac{x}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$	$y = \dfrac{\sin x}{x+3}$
$y = \dfrac{x+3}{\sin x}$	$y = \ln(1-x)$	$y = \ln\sqrt{1-x^2}$
$y = \ln\dfrac{1}{1+\ln(1-x)}$	$y = 1 - \lg x$	$y = \lg(x+3)$
$y = \dfrac{x^2-2}{3x+2}$	$y = \dfrac{1-2x}{x^2-1}$	$y = \dfrac{-4x}{2x-x^2}$
$y = \sqrt{x-x^2}$	$y = \sqrt{\dfrac{2x-6}{4-4x}}$	$y = \sqrt{\dfrac{3x+9}{2x-2}}$
$y = \sqrt{x^2-16}$	$y = \sqrt{27-3x^2}$	$y = \ln\left(x^2-3x-4\right)$
$f(x) = \lg\dfrac{x+1}{x}$	$f(x) = \dfrac{\lg(x+1)}{x}$	$f(x) = \lg(x-4) + \lg(x+1)$

2. Határozza meg a valós számok halmazának az a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetőek!

$f(x) = \lg(x-4) + \lg(x+1)$	$f(x) = \lg\dfrac{x+1}{x}$	$f(x) = \lg\left(x^2-3x-4\right)$
$f(x) = \dfrac{\lg(x+1)}{x}$	$f(x) = \sqrt{3^x-9}$	$f(x) = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\lg\sin x}$
$f(x) = \lg\left(3^x-9\right)$	$f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$	

3. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

$y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$	$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3x}}$	$y = \lg \dfrac{5x - x^2}{4}$
$y = \sqrt{x^2 - 8x + 16}$	$y = x^2 + x \cdot \lvert x \rvert + 3$	$y = \dfrac{1}{2x + 1}$
$y = \lvert x - 3 \rvert + \lvert x + 1 \rvert$	$y = \sqrt{x - 1}$	$y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
$y = \sqrt{(x - 1)^2} + 1$	$y = 4 \cdot 2^x + 1$	$y = \sqrt{x - 4}$
$y = 2 \cdot \sin x - 1$	$y = \dfrac{x - 3}{x^2 + 9}$	$y = x^3 + 3x^2 + 3x$

3.2 Függvények zérus-helyének meghatározása

1. Határozza meg a következő függvények zérushelyeit Horner-elrendezéssel!

a) $f_1(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x \quad [-4,4]$

b) $f_2(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 \quad [-4,4]$

c) $f_3(x) = x^4 - 34x^2 + 225 \quad [-6,6]$

d) $f_4(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 \quad [-6,6]$

e) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \quad [-3,3]$

f) $g(x) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 2 \quad [-3,3]$

g) $h(x) = x^3 - 6x^2 + 32 \quad [-4,4]$

h) $l(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 \quad [-3,3]$

3.3 Függvények korlátossága

1. A következő függvények esetében vizsgálja meg, hogy korlátosak-e. Korlátosság esetén adjon meg egy (alsó vagy felső, vagy alsó és felső) korlátot. Vegye figyelembe a zárójelben szereplő, értelmezési tartományra vonatkozó kikötéseket is.

a) $y = \dfrac{x + 2}{x + 3} \qquad (x > 0)$

b) $y = \dfrac{3x + 2}{x + 3} \qquad (x > 0)$

c) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2} \qquad (-\infty < x < +\infty)$

d) $y = \dfrac{x}{x^2 + 2} \qquad (-\infty < x < +\infty)$

e) $y = \dfrac{1}{1 - x^2} \qquad (-1 < x < +1)$

3.4 Függvények paritása

1. Állapítsa meg párosak, páratlanok, illetve korlátosak-e az alábbi függvények!
   a) $f_1 : D_{f_1} = R, \quad f_1(x) = 3 - x^2$
   b) $f_2 : D_{f_2} = R, \quad f_1(x) = |x| + 2$
   c) $f_4 : D_{f_4} = R, \quad f_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
   d) $f_6 : D_{f_6} = R, \quad f_1(x) = -(x+2)^2 + 1$

2. Válassza ki az alábbi függvények közül a párosakat és páratlanokat!

$f_1(x) = 5x^2 - 7\cos x + 4{,}5$ $\qquad f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad f_3(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$

$f_4(x) = a^x - \dfrac{1}{a^x}$ $\qquad f_5(x) = x \cdot \sin^2 x - x^3$ $\qquad f_6(x) = x^3 - \cos x$