A mértani sorozat alkalmazásai

Dr. Vincze Szilvia

8. MÉRTANI SOROZAT ALKALMAZÁSAI

Bevezető gondolatok

Számoljuk ki, hogy egy dohányos, aki napi egy doboz cigit szív (legolcsóbb 500 Ft), az húsz év alatt mennyi pénztől esik el feltételezve, hogy a cigire szánt pénzt rendszeresen befektette volna éves 8% kamatláb mellett?

(Az egyszerűség miatt tekintsünk el az inflációtól.)

Bevezető gondolatok

Egy év alatt dohányosunk 180.000 Ft-ot költ.

20 év alatt ez 3.650.000 Ft kiadás.

Microsoft Excel - Munkafüzet1

	A	B	C	D	E	F
1	Év	C(0)			kamat	év végén
2	1	180 000		0,08	14 400	194 400
3	2	194 400	180 000	0,08	29 952	404 352
4	3	404 352	180 000	0,08	46 748	631 100
5	4	631 100	180 000	0,08	64 888	875 988
6	5	875 988	180 000	0,08	84 479	1 140 467
7	6	1 140 467	180 000	0,08	105 637	1 426 105
8	7	1 426 105	180 000	0,08	128 488	1 734 593
9	8	1 734 593	180 000	0,08	153 167	2 067 760
10	9	2 067 760	180 000	0,08	179 821	2 427 581
11	10	2 427 581	180 000	0,08	208 606	2 816 188
12	11	2 816 188	180 000	0,08	239 695	3 235 883
13	12	3 235 883	180 000	0,08	273 271	3 689 153
14	13	3 689 153	180 000	0,08	309 532	4 178 686
15	14	4 178 686	180 000	0,08	348 695	4 707 381
16	15	4 707 381	180 000	0,08	390 990	5 278 371
17	16	5 278 371	180 000	0,08	436 670	5 895 041
18	17	5 895 041	180 000	0,08	486 003	6 561 044
19	18	6 561 044	180 000	0,08	539 284	7 280 327
20	19	7 280 327	180 000	0,08	596 826	8 057 154
21	20	8 057 154	180 000	0,08	658 972	**8 896 126**

8.1 Számtani és mértani sorozatok

Beszélhetünk **számtani és mértani sorozatok**ról.

Mi a különbség közöttük?

- A **számtani sorozat**nál az egymást követő tagok **különbsége állandó** (mintha egy lépcsőn mennénk felfelé vagy lefelé) pl:1;4;7;10;13;16;..., vagy: 102;94;86;78;70...,
- A **mértani sorozat**nál az egymást követő tagok **hányadosa** az **állandó**. Pl: 3;6;12;24;48;96;192;..., vagy pl: 102; 34; 34/3; 34/9; 34/27;…

8.1.1 Számtani sorozat definíciója

Az a_1, a_2, a_3, ... sorozatot **számtani sorozat**nak nevezzük, ha létezik $d \in \mathbf{R}$ úgy, hogy az

$$a_{n+1} - a_n = d$$

egyenlőség teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ estén.

A d állandót a számtani sorozat különbségének vagy differenciájának nevezzük. Ha $d > 0$, akkor a számtani sorozat szigorúan monoton növekedő, ha $d < 0$ akkor szigorútan monoton csökkenő, ha $d = 0$, akkor a sorozat minden tagja egyenlő.

8.1.2 Mértani sorozat definíciója

Az a_1, a_2, a_3, ... sorozatot **mértani sorozat**tnak nevezzük, ha létezik $q \in \mathbf{R}$ úgy, hogy az

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

egyenlőség teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ estén.

A q állandót a mértani sorozat hányadosának vagy kvóciensének nevezzük. Az $a_1 > 0$ estében

(1) ha $q < 0$, akkor a mértani sorozat tagjai váltakozó előjelűek;

(2) ha $0 < q < 1$, akkor a mértani sorozat szigorúan monoton csökkenő;

(3) ha $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja egyenlő;

(4) ha $q > 1$, akkor a mértani sorozat szigorúan monoton növekedő;

(5) ha $q = 0$, akkor a mértani sorozat többi tagja (azaz a_2, a_3, ...) 0-val egyenlő.

8.2 Alapfogalmak

Kamat (p): a kölcsönök után az adós által (vagy a betétek után a bank által) időarányosan fizetett pénzösszeg.

Kamatláb (I,i): a pénz használatáért egy megállapodás szerinti időtartamra fizetendő kamat és a tőke közötti százalékban megadott arány; 100 pénzegységre vonatkozó kamat egy meghatározott időre (kamatidőre). A kamatidő általában 1 év.

I = kamatláb, i = matematikai kamatláb

8.2 Alapfogalmak

Kiindulási összeg: C_0

Kamat: $p = C_0 \cdot i$, ahol i a matematikai kamatláb

A kamattal megnövelt összeg (C) kiszámolása:
$C = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+i) = C_0 \cdot r$, ahol
$r = 1 + i$ kifejezést kamattényezőnek nevezzük.

Megjegyzések

A kamatlábat általában 1 éves futamidőre adjuk meg, de előfordul, hogy az év tört részére, *n* napra kell a kamatot kiszámolni. Ekkor az éves kamatot elosztjuk a 365-tel. Megkapjuk az egy napra eső kamatot, majd megszorozzuk a napok számával:

$$p_n = \frac{C_0 \cdot i}{365} \cdot n$$

Megjegyzések

A kamatszámítás képletében 3 mennyiség szerepel, közülük kettő ismeretében a harmadik egyenletrendezéssel mindig számolható. Gyakori, hogy a felkamatolt összeg és a kamattényező ismeretében keressük a kiindulási összeget, azaz „visszadiszkontálunk”, **diszkontál**unk:

$$C = C_0 \cdot r \Rightarrow C_0 = \frac{C}{r} = C \cdot \frac{1}{r} = C \cdot v$$

Az 1/r kifejezést v-vel jelöljük és **diszkonttényező**nek nevezzük.

8.3.1 Kamat és annak számítása

A **kamat** a **kölcsönadott pénz használatáért fizetett díj**. A kamatozási időszak az az időtartam, amelyre a kamat jár.

Kamatszámítás

- **Egyszerű kamatszámítás**
- **Kamatos-kamatszámítás**

8.3.1a Egyszerű kamat számítása

Egyszerű kamatszámításnál **a kamatot nem csatolják a tőkéhez**, **a kamat nem kamatozik**.

Az időegység alatti tőkenövekmény mértéke időben állandó. Ez azt jelenti, hogy minden kamatozási periódus végén a kezdőtőke és a kamatláb szorzataként kapjuk meg a kamat összegét.

Egy évre jutó kamat = kezdőtőke * éves kamatláb

8.3.1a Példa - egyszerű kamat számítás

Számítsuk ki 200.000 Ft-nak 24%-os kamatláb melletti kamatát fél évre!

Egy évre jutó kamat = 200.000 * 0,24 = 48.000

Félévre jutó kamat = 48.000 / 2 =24.000

Jövőérték = 200.000 + 24.000 = 224.000

8.3.1a Példa – egyszerű kamat számítása

15.000 Ft kölcsönt kapunk úgy, hogy 1 év múlva 17.400 Ft-ot kell visszafizetnünk. Hány százalék a kamat?

Induló összeg 15.000 $= C_0$
A kamattal megnövelt összeg 17.400 $= C$

$$\boxed{\frac{17.400}{15.000} = 1{,}16 = \frac{C}{C_0}}$$

A $C = C_0 \cdot r$ képletből $r = 1{,}16$, azaz $1 + i = 1{,}16$, vagyis a matematikai kamatláb $i = 0{,}16$, vagyis
$I = 16\ \%$.

8.3.1a Példa- egyszerű kamat számítás

$C_0 = 10.000$ Ft

$I = 8\%$

$C_{1év} = 10.000 * 0,08 + 10.000 = 10.800$ Ft

Mi a helyzet akkor, ha mondjuk meghirdetik az éves 8% kamatot (a bankos hirdetményekben mindig az éveset látjuk) de csak 3 hónapra kötjük le a pénzünket?

8.3.1a Példa- egyszerű kamat számítás

Számoljuk a kamatláb 1/12-ed részét (ez a havi kamat) és szorozzuk meg a lekötés hónapjainak számával:

$$C_{3/12} =$$

$$= 10.000 * (3/12 * 8\%) + 10.000 =$$

$$= 10.200 \text{ Ft}$$

8.3.1b Kamatos kamat számítás

A **kamatos kamat** azt jelenti, hogy a **kamatperiódus végén a kiindulási összeghez hozzáadjuk az addig „termelődött” kamatot** (tőkésítjük a kamatot), **és az összeget újra kamatoztatjuk az előzővel azonos kamatlábbal és kamatozási periódussal.** Ez a folyamat többször (n-szer) ismétlődhet, és az n-edik időszak végén szeretnénk hozzájutni a pénzünkhöz.

Egy jövőbeni pénz jelenértékének meghatározása

Képzeld el azt, hogy megveszik tőled a házad, melyet 10.000.000 Ft-ért adtál el, de a vevő úgy fizet, hogy azonnal 5.000.000 Ft-ot ad, a többit viszont csak fél év múlva fizetné. A türelmedért viszont akkor majd 5.150.000 Ft adna neked. Megéri-e Neked ez az üzlet, ha a banki kamatláb 8%?

8.3.1b Kamatos kamat számítás

Legyen a kezdőtőke K_0, évente tőkésítjük I%-os évi kamatláb mellett.

- Az 1. év elejei kezdőtőke az év végére $K_0 \cdot r$-re növekszik.
- A 2. év elején a kiindulási összeg $K_0 \cdot r$, az I%-os növekedés az $r = 1 + i$-vel való szorzással írható le, vagyis év végén az összeg: $K_0 \cdot r \cdot r = K_0 \cdot r^2$.
- A 3. év elején meglevő $K_0 \cdot r^2$ összeg az év végére r-szeresére nő és $K_0 \cdot r^3$ lesz.
- Az n-edik év végére a felnövekedett összeg: $K_n = K_0 \cdot r^n$.

8.3.1b Példa - kamatos kamat számítás

Az év elején az Erste Banknál 7%-os kamatra elhelyezett 30.000 Ft a harmadik év végére milyen értékre növekszik?

Kamat-időszak	Tőke az időszak elején	Egyszerű kamat	Tőke az időszak végén
1	(c_0 =) 30.000	30.000 · 0,07	c_1= 30.000 + 30.000 · 0,07 = = 30.000 · (1+0,07) = 32.100
2	(c_1 =) 32.100	32.100 · 0,07	c_2= 32.100 + 32.100 · 0,07 = = 34.437
3	(c_2 =) 34.437	34.437 · 0,07	c_3= 34.737 + 34.437· 0,07 = = $\boxed{36.757,59}$

8.3.1b Példa - kamatos kamat számítás

Kamat-időszak	Tőke az időszak elején	Egyszerű kamat	Tőke az időszak végén
1	c_0	$c_0 \cdot i$	$c_1 = c_0 + c_0 \cdot i = c_0(1+i) =$ $= c_0 \cdot r$

= I / 100

r = kamattényező

8.3.1b Példa - kamatos kamat számítás

Kamat-időszak	Tőke az időszak elején	Egyszerű kamat	Tőke az időszak végén
1	c_0	$c_0 \cdot i$	$c_1 = c_0 + c_0 \cdot i = c_0(1+i) =$ $= c_0 \cdot r$
2	$c_0 \cdot r$	$c_0 \cdot r \cdot i$	$c_2 = c_0 \cdot r + c_0 \cdot r \cdot i =$ $= c_0 \cdot r(1+i) = c_0 \cdot r^2$

8.3.1b Példa - kamatos kamat számítás

Kamat-időszak	Tőke az időszak elején	Egyszerű kamat	Tőke az időszak végén
1	c_0	$c_0 \cdot i$	$c_1 = c_0 + c_0 \cdot i = c_0(1+i) =$ $= c_0 \cdot r$
2	$c_0 \cdot r$	$c_0 \cdot r \cdot i$	$c_2 = c_0 \cdot r + c_0 \cdot r \cdot i =$ $= c_0 \cdot r(1+i) = c_0 \cdot r^2$
…			
n	$c_0 \cdot r^{n-1}$	$c_0 \cdot r^{n-1} \cdot i$	$c_n = c_0 \cdot r^{n-1} + c_0 \cdot r^{n-1} \cdot i =$ $= c_0 \cdot r^{n-1} \cdot (1+i) = c_0 \cdot r^n$

8.3.1c Kamatos kamat számítás inflációval

Ha kölcsönadunk egy évre 16%-os kamatláb mellett, de közben az éves infláció 8%, akkor hány százalékkal változik a pénzünk vásárló értéke?

8.3.1c Vásárlóérték változása

Ha az éves kamatláb I%, az **éves infláció F%,** akkor a **vásárlóérték változásá**t egy évre vonatkozóan az

$$\frac{1+i}{1+f}$$

hányados adja, ahol az f az **inflációs ráta**, az F százalékláb századrésze.

8.3.1c Kamatos kamat számítás inflációval

$$\frac{1+i}{1+f}=\frac{1+0,16}{1+0,08}=\frac{1,16}{1,08}=1,074$$

Kiinduláskor 1 egységnyi pénzünkért 1 egységnyi érékű árut vásárolhatunk.

A kölcsönidőszak végén a pénzünk 1,16 egységnyire nő, az eredetileg 1 egységbe kerülő áru ára 1,08 lesz, azaz pénzünkért ekkor 1,16/1,08 = 1,074 „áruegységet” kapunk, vagyis a vásárlóérték 1,074-szeresére nőtt, vagyis 7,4%-kal.

8.3.2 Járadékszámítás (annuitás)

Annuitás az, amikor **rendszeresen félreraksz pénzt egy időszakon keresztül**. A számítás megmondja, hogy **adott kamatláb mellett rendszeres befizetéseket eszközölve** (pl. életbiztosítást fizetsz, rendszeresen bankba rakod a pénzed, hiteledet törleszted) **mennyi lesz a befizetési időszak végén a kamatokkal növelt végösszeg**?

8.3.2 Járadékszámítás (annuitás)

Járadékon általában **egyenlő időközökben történő azonos nagyságrendű befizetések sorozatá**t értjük, **adott kamatfeltételekkel**. Alapesetben a pénzmozgás n évig tartson, I% évi kamatlábban és év elején történő ‘a’ Ft befizetéssel. (Az ‘a’ az annuitás rövidítése.)

A járadék lehet **gyűjtő**, ekkor a befizető magának gyűjti a pénzt, vagy **törlesztő**, amikor egy felvett kölcsönt törleszt.

8.3.2a Gyűjtőjáradék

15 éven keresztül minden év elején 10.000 Ft-ot helyezünk el ifjúsági takarékbetétbe. Mekkora a betétek felnövekedett értékének az összege a 15. év végén évi 3%-os kamatozás mellett?

állandó járuléktag: a
kamattényező: r
időközök száma: n

8.3.2a Gyűjtőjáradék

A feladat az $a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \ldots + a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^n$ mértani sorozat összegének meghatározása.

A mértani sorozat összegképlete alapján:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot r \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1} \\[2em] (r = 1 + i) \end{array}}$$

8.3.2a Példa - gyűjtőjáradék

A feladatunkban: $a = 10\ 000$; $r = 1{,}03$ és $n = 15$.

A keresett járadékérték:

8.3.2a Példa - gyűjtőjáradék

5 éven át minden év elején hány Ft-ot kell a takarékba tenni, ha azt akarjuk, hogy az 5. év végén évi 4%-os kamatozás mellett 200.000 Ft-ot kapjunk vissza?

$$S_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

A képletből most az '*a*' értékét keressük, azaz

$$a = \frac{S_n \cdot (r-1)}{(r^n - 1) \cdot r}$$

8.3.2a Példa - gyűjtőjáradék

A feladatunkban:

$$a = \frac{200.000 \cdot 0{,}04}{1{,}04 \cdot \left(1{,}04^{5} - 1\right)} = 35.555$$

5 éven keresztül minden év elején 35.555 Ft-ot kell betenni a takarékba, hogy a befizetés után 5 évvel megkapjuk a 200.000 Ft-ot.

8.3.2b Törlesztőjáradék

500.000 Ft kölcsönt veszünk fel 28%-os kamatra. Évente 150.000 Ft-ot törlesztünk. Mennyi tartozásunk marad az 5. év végén?

K: kölcsön
I: kamat
k: évente a törlesztőrészlet

8.3.2b Törlesztőjáradék

Az n-edik év végén a tartozásunk:

$$\boxed{K_n = K \cdot r^n - k \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}}$$

A képletbe behelyettesítve az adatokat:

$$K_n = 500.000 \cdot 1,28^5 - 150.000 \cdot \frac{1,28^5 - 1}{0,28} =$$

$$= 1.717.987 - 1.304.986 = 413.001\, Ft$$

8.3.2b Törlesztőjáradék

Fontos kérdés, hogy hány év alatt törlesztenénk tartozásunkat, ha évente pl. 200.000 Ft-ot törlesztenénk?

Nyilvánvalóan K_n = 0, azaz

$$0 = 500.000 - 1{,}28^n - 200.000 \cdot \frac{1{,}28^n - 1}{0{,}28} \Rightarrow$$

$$n = \frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 1{,}28} \approx 4{,}877$$

8.3.2b Törlesztőjáradék

Mekkora kölcsönt vehetünk fel, ha évi ‘a’ Ft törlesztést tudunk vállalni n éven keresztül évi I% kamatláb mellett? A $V_n^{(1)}$-gyel jelölt kölcsönt annak felvétele után 1 évvel kezdjük törleszteni.28

$\frac{a}{r}$ az első év végén befizetett a forintnak akkorra tőkerész felel meg a kölcsönösszegben, amely egy év alatt a-ra nőne fel: a/r.

$\frac{a}{r^2}$ a második év végén befizetett a forintnak akkorra tőkerész felel meg a kölcsönösszegben, amely két év alatt a-ra nőne fel: a/r^2 (az éves növekedést az r^2 - tel való szorzással írjuk le)

$\frac{a}{r^n}$

8.3.2b Törlesztőjáradék

A kölcsönt ezeknek a tőkerészeknek az összege adja:

$$V_n^{(1)} = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \ldots + \frac{a}{r^n} =$$

$$= \frac{a}{r} \cdot \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\frac{1}{r} - 1} = a \cdot \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{1 - r} = \frac{a}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$$

8.3.2b Példa - törlesztőjáradék

Felvettünk 1 millió Ft kölcsönt évi 15% kamat mellett, 10 éves futamidőre, évente azonos nagyságú befizetést (‘a’ Ft) vállalva. A törlesztést a kölcsön felvétele után egy évvel kezdjük. Mekkora összeget kell fizetnünk évente?

$$V_n^{(1)} = 10^6; I = 15\%; \quad n = 10$$

$$V_n^{(1)} = \frac{a}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^n}\right);$$

$$10^6 = \frac{a}{0{,}15} \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}15^{10}}\right) \Rightarrow a = 199.252\,Ft$$

8.3.2c Törlesztőterv

A törlesztő járadék alkalmazásakor törlesztő tervet készíthetünk, amelyben évente feltűntetjük, hogy mennyi a tartozásunk év elején, a befizetésünkből (annuitás) mennyi megy kamatra, mennyi tőketörlesztésre és mekkora az összes tőketörlesztésünk.

Első lépésben a felvett kölcsön nagysága, a kamatláb és a futamidő ismeretében ki kell számolni az annuitást, majd kitöltjük a táblázatot.

8.3.2c Törlesztőterv

Felvettünk 1 mFt kölcsönt évi 15% kamat mellett, 10 éves futamidőre évente azonos nagyságú (‘a’ Ft) befizetése mellett. A törlesztést 1 évvel a kölcsön felvétele után kezdjük. Készítsünk törlesztő tervet.

Az a = 199.252 Ft (melyet az előzőekben megkaptunk).

8.3.2c Törlesztőterv

Év	Tartozás az év elején	Az annuitásból		Összes törlesztés
		kamatra	törlesztésre	
1	**1 000 000**	**150 000**	**49 252**	**49 252**
2	**950 748**	**142 612**	**52 640**	**105 892**
3	**894 108**			

x_1 G_1

A törlesztő terv k-adik sorában (ahol a „k” 1 és n közötti szám):

$$x_k = x_1 \cdot r^{n-1} \quad \text{és} \quad G_k = \frac{x_1}{i} \cdot \left(r^k - 1\right)$$

8.3.2c Törlesztőterv

Microsoft Excel - cigaretta

Év	Kölcsön	Kamat	Annuitás	Kamattörlesztés	Tőketörlesztés
1	1 000 000	0,15	199 252	150 000	49 252
2	950 748	0,15	199 252	142 612	56 640
3	894 108	0,15	199 252	134 116	65 136
4	828 972	0,15	199 252	124 346	74 906
5	754 066	0,15	199 252	113 110	86 142
6	667 924	0,15	199 252	100 189	99 063
7	568 861	0,15	199 252	85 329	113 923
8	454 938	0,15	199 252	68 241	131 011
9	323 927	0,15	199 252	48 589	150 663
10	173 264	0,15	199 252	25 990	173 262

8.3.2c Törlesztőterv

Az első törlesztőrészt úgy kapjuk, hogy az annuitásból kivonjuk a kölcsön egy évi kamatát:

$$x_1 = a - V_n^{(1)} \cdot i; \quad x_1 = 199.252 - 10^6 \cdot 0{,}15 = 49.252$$

$$x_2 = a - \left(V_n^{(1)} - x_1\right) \cdot i = a - V_n^{(1)} \cdot i + x_1 \cdot i =$$

$$= x_1 + x_1 \cdot i = x_1 \cdot (1 - i) = x_1 \cdot r$$

$$x_3 = x_2 \cdot r = x_1 \cdot r^2$$

$$x_4 = x_3 \cdot r = x_1 \cdot r^3$$

$$x_k = x_{k-1} \cdot r = x_1 \cdot r^{k-1}$$

8.3.3 Beruházások matematikája

A beruházási számításoknál a kamatos kamat és a járadékszámítás módszereit alkalmazzuk.

Jelöljük

- az időszakok számát n-nel;
- az egyes időszakok beruházást a_1, a_2, ..., a_n-nel,
- az egyes időszakok tiszta jövedelmét: A_1, A_2, ..., A_n-nel és
- a beruházási tényezőt b-vel.

8.3.3 Beruházások matematikája

- Az első beruházás: $a_1=A_1 \cdot b$, a következő év tiszta jövedelme: $A_2=A_1 \cdot r$.
- A második beruházás: $a_2=A_2 \cdot b=A_1 \cdot r \cdot b=a_1 \cdot r$, a következő év tiszta jövedelme: $A_3=A_2 \cdot r=A_1 \cdot r^2$.
- A harmadik beruházás: $a_3=A_3 \cdot b=A_2 \cdot r \cdot b=a_1 \cdot r^2$, a következő év tiszta jövedelme: $A_4=A_3 \cdot r=A_2 \cdot r^3$.

A beruházás összegét az a_1, $a_1 \cdot r$, $a_1 \cdot r^2$, ..., $a_1 \cdot r^{n-1}$ mértani sorozat összege adja:

$$B_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

8.3.3 Példa - beruházások matematikája

Legyen 1 mFt egy gazdaság tiszta jövedelme az egyik évben. Beruházásokra ennek és minden következő év tiszta jövedelmének 25%-át fordítjuk. A beruházások az előző év tiszta jövedelmét 5%-kal emelik. Mekkora a beruházások összege 5 év alatt?

Feladat az ismétlődő beruházások összegének meghatározása!

$$B_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

8.3.3 Példa - beruházások matematikája

- Az első beruházás: 1.000.000 · 0,25 = 250.000 Ft,
  a következő év tiszta jövedelme:
  1.000.000 · 1,05 = 1.050.000 Ft
- A második beruházás: 1.050.000 · 0,25 = 262.500 Ft;
  a következő év tiszta jövedelme:
  1.050.000 · 1,05 = 1.102.500 Ft
- ....

$$B_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \Rightarrow$$

$$B_5 = 250.000 \cdot \frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05}$$

8.3.3 Példa - beruházások matematikája

Fontos kérdés, hogy mekkora értéket kell a beruházott eszközöknek évente hozniuk, hogy a beruházás megtérüljön?

Egy mg-i vállalkozó 1.500.000 Ft értékben vásárol olyan gépet, amelynek az élettartalmát 12 évre becsülik. Mekkora értéket kell ennek a gépnek évente hoznia, hogy ezt az értéket az évenkénti beruházásnak tekintve a beruházások felnövekedett értéke egyenlő legyen az 1.500.000 Ft felnövekedett értékével. A beruházás átlagos jövedelmeződése 15%-os.

8.3.3 Példa - beruházások matematikája

A beruházás akkor **rentábilis**, ha a hozadékokból nyerhető összeg nem kisebb, mint az a pénzösszeg, amelyhez akkor jutnánk, ha a beruházást nem hajtottuk volna végre, hanem a beruházásra szánt pénzt n évig kamatoztatnánk.

8.3.3 Példa - beruházások matematikája

A beruházásra fordított 1.500.000 Ft 12 év alatt $1.500.000 \cdot 1{,}15^{12}$ értékre növekedne fel.

Jelöljük H-val az ismeretlen évenkénti beruházásnak tekintett hozadék értékét, aminek felnövekedett értéke:

$$H \cdot \frac{1{,}15^{12} - 1}{0{,}15}$$

8.3.3 Példa - beruházások matematikája

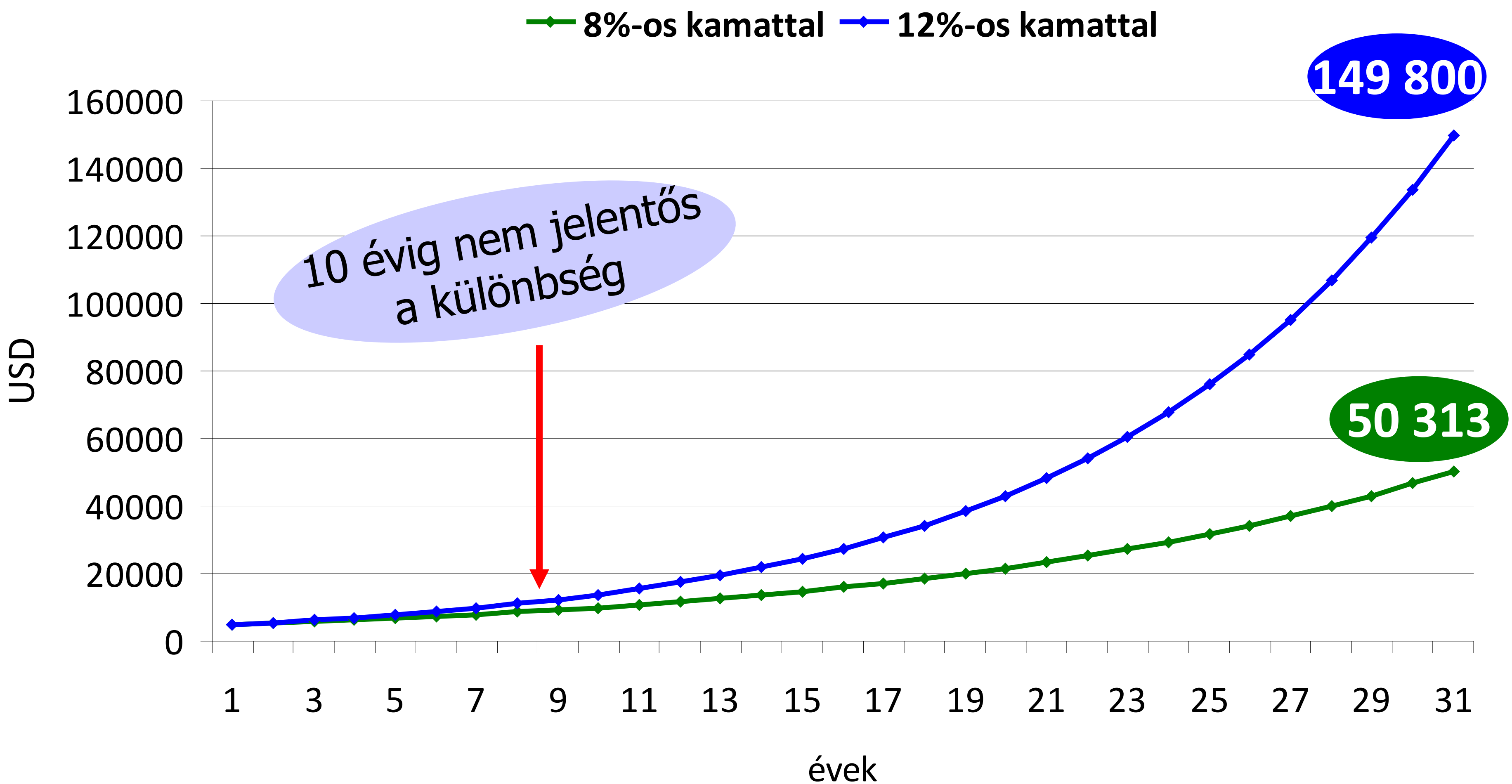
$$1.500.000 \cdot 1,15^{12} = H \cdot \frac{1,15^{12} - 1}{0,15}$$

$$\boxed{H = 276.721,164}$$

Évenkénti 276.721,164 Ft hozadék mellett 12 év alatt megtérül az egyszeri 1.500.000 Ft-os beruházás.

Befejező gondolatok

Mi történik 5.000 USD befektetéssel 30 év alatt különböző hozamokkal?



Befektetési alapismeretek: 72-es szabály

A 72-es szabály : **egy bizonyos éves százaléknövekmény mellett hány év alatt duplázódik meg a pénzed?** Ez úgy történik, hogy a 72-őt el kell osztani a százalékban megadott éves növekmény értékével.

Ha egyévi 8%-os hozamról van szó, akkor 72 osztva nyolccal = 9. Tehát kilenc év alatt duplázódik meg a pénz évi nyolc százalékos hozam és kamatos kamat mellett. Ha a növekmény például 3 százalék, akkor 72:3 = 24. Tehát 24 év alatt. Ha a százalék 16, akkor nagyjából négy és fél év elegendő a duplázáshoz.

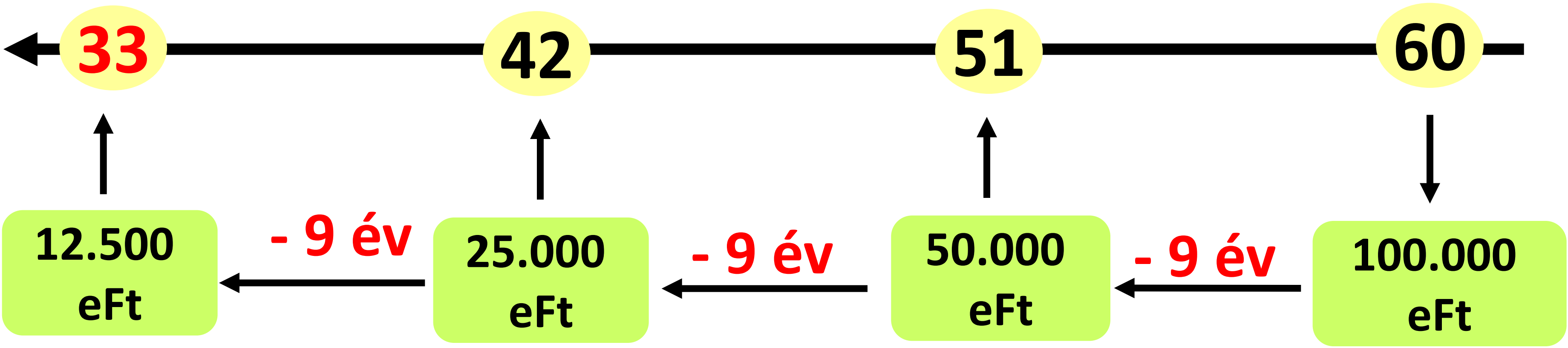
Befektetési alapismeretek: 72-es szabály

Tegyük fel, hogy most 33 éves vagy és 60 éves korodban szeretnél 100 millió forinttal nyugdíjba menni. Adva van egy évi 8%-os befektetés. Az a kérdés, hogy **mekkora kezdőtőkét kellene most elindítanod ahhoz, hogy évi 8% mellett 60 éves korodra elérd a 100 milliót**?

Hogyan tudod ezt kiszámolni a 72-es szabály segítségével?

Befektetési alapismeretek: 72-es szabály

Először számoljuk ki, hogy a nyolc százalék mellett hány év alatt történik egy duplázás? 72:8 = 9. Tehát kilenc évente duplázódik meg a tőke.



Köszönöm a figyelmet!