

Differenciálszámítás alkalmazása

Dr. Vincze Szilvia

11. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

11.1 L'Hospital szabály

11.2 Magasabbrendű deriváltak

11.3 Függvény monotonitásának vizsgálata

11.4 Függvény szélsőértékének és
deriváltjának kapcsolata

11.5 Függvény alaki tulajdonsága és a derivált
kapcsolata

11.6 Függvény inflexiós pontja és a derivált
kapcsolata

Példa – Függvények határértéke

$$1.) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = ?$$

$$2.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = ?$$

$$3.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x}{1 - 2x + 2x^3} = ?$$

11.1 L'Hospital szabály

L'Hospital¹⁶-szabály.

Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$, és legyen $a \leq x_0 \leq b$. Ha f és g differenciálható $]a, b[\setminus \{x_0\}$ -on, $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a, b[-$ re és

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

valamint

$$(2) \text{ létezik } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ véges vagy végtelen határérték,}$$

$$\text{akkor } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

11.1 L'Hospital szabály

A L'Hospital szabály a $0/0$ vagy a ∞/∞ alakú határértékek meghatározására használható, de megfelelő helyettesítéssel más alakú függvények határértékének meghatározására is alkalmas:

1.) $0 \cdot \infty$

2.) $\infty - \infty$

3.) 0^0

4.) ∞^0

5.) 1^∞

11.2 Magasabbrendű deriváltak

Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható, és tegyük fel, hogy az $f': H \rightarrow \mathbf{R}$ deriváltfüggvény differenciálható az $x_0 \in H$ pontban. Ekkor azt mondjuk, hogy az f kétszer differenciálható x_0 -ban, és az f második deriváltja az $x_0 \in H$ -ban $f''(x_0) = (f'(x_0))'$.

Ha az f a H minden pontjában kétszer differenciálható, akkor f -et kétszer differenciálható függvénynek nevezzük, és $f'': H \rightarrow \mathbf{R}$ függvény az f második deriváltfüggvénye.

Megjegyzés. A **magasabbrendű deriváltakat** az alábbi rekurzióval értelmezzük: amennyiben az $f^{(n)}: H \rightarrow \mathbf{R}$ n -edik deriváltfüggvény létezik és differenciálható x_0 -ban, akkor $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)}(x_0))'$ az f függvény x_0 -beli $(n+1)$ -edik deriváltja. Ha az f függvény a H halmaz minden pontjában $(n+1)$ -szer differenciálható, akkor f $(n+1)$ -szer differenciálható függvény.

11.3 Függvény monotonitásának vizsgálata

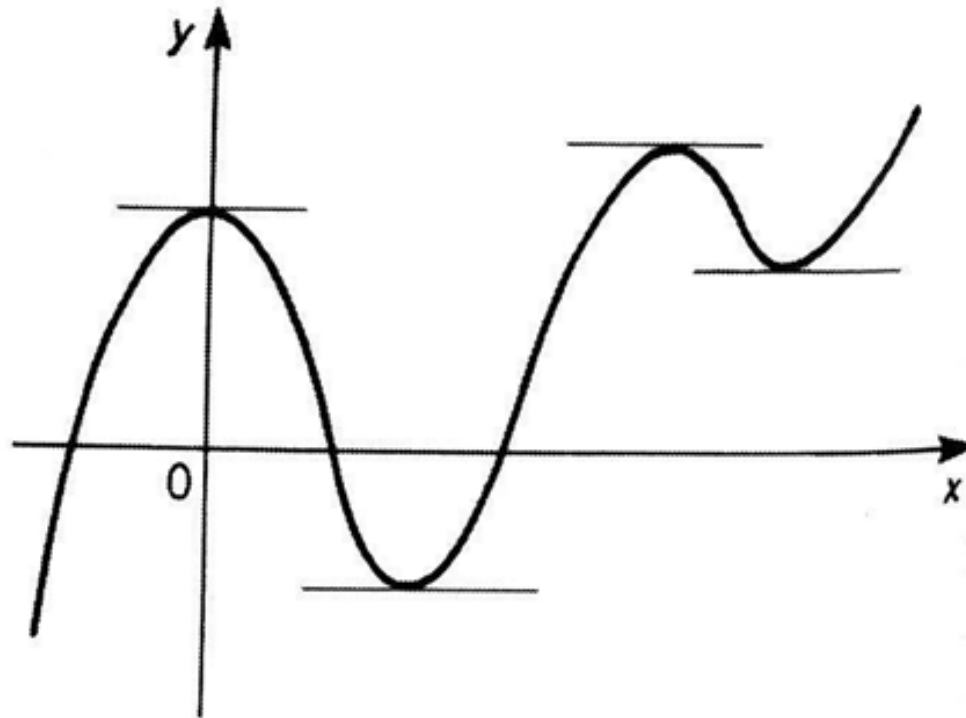
Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$, $]a, b[\subset H$, f differenciálható $]a, b[-n$.

- (1) f monoton nő $]a, b[-n \iff f'(x) \geq 0$ minden $x \in]a, b[-re,$
- (2) f monoton csökken $]a, b[-n \iff f'(x) \leq 0$ minden $x \in]a, b[-re,$
- (3) f szigorúan monoton nő $]a, b[-n$, ha $f'(x) \geq 0 \forall x \in]a, b[-re$, és nincs olyan $]c, d[\subset]a, b[$ (részintervallum), melyre $f'(x) = 0$ minden $x \in]c, d[-re,$
- (4) f szigorúan monoton csökken az $]a, b[-n$, ha $f'(x) \leq 0, \forall x \in]a, b[-re$, és nincs olyan $]c, d[\subset]a, b[$, melyre $f'(x) = 0$ minden $x \in]c, d[-re,$
- (5) f konstans $]a, b[-n \iff$ ha $f'(x) = 0$ minden $x \in]a, b[-re.$

11.4 Függvény szélsőértékének és deriváltjának kapcsolata

Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható függvény. Ha $f'(x_0) = 0$ és f' az x_0 -ban előjelet vált, akkor az x_0 az f függvény szélsőértékhelye.

Megjegyzés. Ha az f' előjele pozitívból negatívba vált az x_0 -ban, akkor x_0 maximum hely, ha az f' előjele negatívból pozitívba vált az x_0 -ban, akkor x_0 minimum hely.





11.4 Függvény szélsőértékének és deriváltjának kapcsolata



Az $]a;b[$ intervallumban differenciálható $f(x)$ függvénynek az intervallum x_0 pontjában csak akkor lehet lokális szélsőértéke, ha $f'(x_0) = 0$. Ez a szélsőérték létezésének **szükséges feltétele**.

Ha emellett az x_0 pont környezetében a derivált még előjelet is vált, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 pont környezetében lokális szélsőértéke van.

11.4 Függvény szélsőértékének és deriváltjának kapcsolata

A derivált előjelváltásának módjából a szélsőérték jellegére is következtethetünk.

x	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		lokális max.	

x	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		lokális min.	

11.5 Függvény alaki tulajdonságai és a derivált kapcsolata

Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$, $]a, b[\subset H$, f kétszer differenciálható $]a, b[-n$.*

$$(1) \quad f \text{ konvex }]a, b[-n \iff f''(x) \geq 0 \text{ minden } x \in]a, b[-re,$$

$$(2) \quad f \text{ konkáv }]a, b[-n \iff f''(x) \leq 0 \text{ minden } x \in]a, b[-re.$$

11.6 Függvény inflexiós pontja és a derivált kapcsolata

Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ha $f''(x_0) = 0$ és f'' az x_0 -ban előjelet vált, akkor az x_0 pontban az f függvénynek inflexiós pontja van.

x	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv

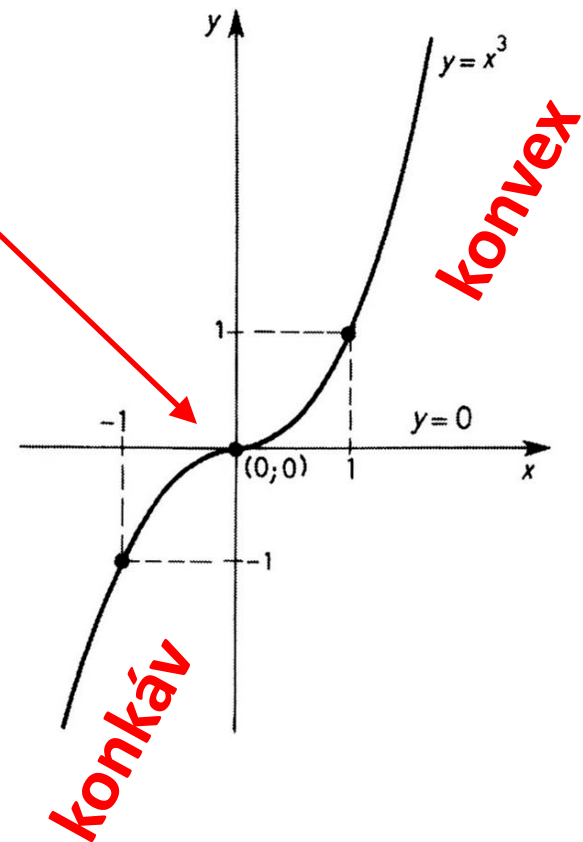
x	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

11.6 Függvény inflexiós pontja és a derivált kapcsolata

Inflexiós pont, ahol a függvény konvexitása megváltozik

Ha az $f(x)$ függvény az $]a;b[$ intervallumban kétszer differenciálható, és

$f''(x) \geq 0$, akkor az $f(x)$ függvény **konvex**,
ha **$f''(x) \leq 0$** , akkor az $f(x)$ függvény **konkáv**.



11.6 Függvény inflexiós pontja és a derivált kapcsolata

Ha az $f(x)$ függvény az $]a;b[$ intervallum x_0 pontjában kétszer differenciálható, és $f''(x_0) = 0$, valamint a második derivált előjelet vált, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen **inflexiós pontja** van.

Ha az $f(x)$ függvény az $]a;b[$ intervallum x_0 pontjában háromszor differenciálható, és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen inflexiós pontja van.

Tétel

Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ $(n + 1)$ -szer differenciálható függvény. Ha x_0 a H belső pontja úgy, hogy

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0,$$

de $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, akkor

- (1) ha n páros, akkor x_0 inflexiós pont,
- (2) ha n páratlan, akkor x_0 szélsőérték hely, és ha $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, akkor x_0 minimum hely, ha $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, akkor x_0 maximum hely.

Tétel

Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$, $]a, b[\subset H$ és f differenciálható $]a, b[-n$.*

(1) *f konvex $]a, b[-n \iff f'$ monoton nő $]a, b[-n$,*

(2) *f konkáv $]a, b[-n \iff f'$ monoton csökken $]a, b[-n$.*

Köszönöm a figyelmet!