Parciális deriváltak

1 Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk két vektor skaláris szorzatán?
2. Definiálja az n-dimenziós Euklideszi tér fogalmát.
3. Definiálja a többváltozós függvények határértékét és folytonosságát.
4. Mikor mondjuk az f többváltozós függvényről, hogy folytonosan differenciálható?
5. Magyarázza el a parciális deriválás lényegét.
6. Definiálja a többváltozós függvények lokális és globális maximumát és minimumát.
7. Adja meg a magasabbrendű parciális derivált fogalmát.

2 Példa

1. Számítsa ki az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait!
   - $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 7x + 2$
   - $f(x,y) = (2x^4 - 2x^2 y + 3y^2)^5$
   - $f(x,y) = e^{2x^2 - 5y^2 + 3y}$
   - $f(x,y) = 2x^2 \cdot e^{-\sqrt{3x+5y+7}}$
   - $f(x,y) = \sqrt[3]{7x^2 y^5 - 4x + 5y^2 + 7}$
   - $f(x,y,z) = 6x^2 y^3 z^5 - 7\cos(5x+3) + \sqrt[3]{x^2 + z^2} + 5$

Megoldás:

- $f_x'(x,y) = 4x - 4y - 7$ és $f_y'(x,y) = -4x + 6y$
- Összetett függvény deriválási szabályát használva:
  $f_x'(x,y) = 5(2x^4 - 2x^2 y + 3y^2)^4 \cdot (8x^3 - 4xy)$
  $f_y'(x,y) = 5(2x^4 - 2x^2 y + 3y^2)^4 \cdot (-2x^2 + 6y)$
- Összetett függvény deriválási szabályát használva:
  $f_x'(x,y) = e^{2x^2 - 5y^2 + 3y} \cdot 4x$ és $f_x'(x,y) = e^{2x^2 - 5y^2 + 3y} \cdot (-10y + 3)$
- A szorzat deriválási szabályát kell alkalmazni az „x” szerinti deriválás során, majd az e^x függvény esetében az összetett függvény deriválási szabályát. Az „y” szerinti deriváláskor csak az összetett függvény deriválási szabályát kell alkalmazni:
  $$f_x'(x,y) = 4x \cdot e^{-\sqrt{3x+5y+7}} + 2x^2 \cdot e^{-\sqrt{3x+5y+7}} \cdot \left[-\frac{1}{2}\right](3x+5y+7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3$$
  $$f_y'(x,y) = 2x^2 \cdot e^{-\sqrt{3x+5y+7}} \cdot \left[-\frac{1}{2}\right](3x+5y+7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 = \frac{-5x^2}{\sqrt{3x+5y+7}} \cdot e^{-\sqrt{3x+5y+7}}$$
- Összetett függvény deriválási szabályát használva:
  $$f_x'(x,y) = \frac{14xy^5 - 4}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(7x^2 y^5 - 4x + 5y^2 + 7\right)^2}}$$ és
  $$f_y'(x,y) = \frac{35x^2 y^4 + 10y}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(7x^2 y^5 - 4x + 5y^2 + 7\right)^2}}$$

- $f_x'(x,y,z) = 12xy^3z^5 + 7\sin(5x+3)\cdot 5 + \frac{1}{3}\left(x^2+z^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x$

  $f_y'(x,y,z) = 18x^2y^3z^5$

  $f_z'(x,y,z) = 30x^2y^3z^4 + \frac{1}{3}\left(x^2+z^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2z$

2. Számítsa ki az $f(x,y) = x^2\cdot\cos(y) + xy$ kétváltozós függvény másodrendű parciális deriváltjait!

Megoldás:

$f_x'(x,y) = 2x\cdot\cos(y) + y$ $\qquad$ $f_y'(x,y) = -x^2\cdot\sin(y) + x$

$f_{xx}''(x,y) = 2\cdot\cos(y)$ $\qquad$ $f_{xy}''(x,y) = -2x\cdot\sin(y) + 1$

$f_{yx}''(x,y) = -2x\cdot\sin(y) + 1$ $\qquad$ $f_{yy}''(x,y) = -x^2\cdot\cos(y)$

3 Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az alábbi függvények elsőrendű parciális differenciálhányadosait!

a) $f(x,y) = 3xy^5$

b) $f(x,y) = \frac{3}{4}x^4e^xy^6$

c) $f(x,y) = \frac{3\left(x^2+y^2\right)}{x^2y}$

d) $f(x,y) = \frac{x\cdot 2^y - y\ln x}{\sqrt{xy}}$

e) $f(x,y) = x^2\cdot\sin\left(x - \frac{y}{x}\right)$

f) $f(x,y,z) = x^2y + 3y^5x - 2x^3y^4z^2$

g) $f(x,y) = 3xy - x^3y^3$

h) $f(x,y) = x^2 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

i) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

j) $f(x,y) = 2x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 8y^2 - 7xy + 6x$

k) $f(x,y) = y\cos x + x\cos y$

l) $f(x,y) = xe^y + ye^x$

m) $f(x,y) = \sin^2 x + \sin x\cos y + \cos^2 y$

n) $f(x,y,z) = xy\sin z + xz\ln y + e^xy$

o) $f(x,y) = 2xy - ye^{\sqrt{3-x}}$

p) $f(x,y) = 2e^{xy} + 3a^{xy^2} + 2x^3y^2$

q) $f(x,y) = x^2y^3 + x^2\sin xy + y\ln x$

r) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$

s) $f(x,y) = e^{xy}$

t) $f(x,y) = xy - \frac{3}{x} + \frac{5}{y}$

u) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

v) $f(x,y,z) = 3x^2 \cdot \cos(x^2 - 4y) + \ln\frac{5x - y}{3x} - 7e^{-2x^2+3y}$

2. Adja meg a következő függvények első- és másodrendű parciális deriváltjait!

a) $f(x,y) = 2x^2y^3 - 5\cos x + e^{2y} - 3xy$

b) $f(x,y) = -12x \cdot \cos(7xy + 6y^2)$

c) $f(x,y) = e^{2x^2 - 4xy + 6y}$

d) $f(x,y) = \frac{2x^2 - 4xy}{\sin x}$