

# DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI: SZÖVEGES SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK, ELASZTICITÁS

---

## 1 Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a szöveges szélsőérték feladatok megoldásának lépéseit.
2. Mit ért elaszticitáson!
3. Adja meg az elaszticitás képletét!

## 2 Példák

1. Tekintsük az  $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}^+$ ,  $f(x) = -0,008x^3 + 0,72x^2 + 4x$  adott ráfordítás hozam függvényünket, és legyen az  $x$  és  $f(x)$  mértékegysége 1 000 Ft. Deriválás segítségével válaszoljon a következő kérdésekre:
  - (1) Hol lesz maximális a hozam értéke?
  - (2) Hol ad 1.000 Ft plusz ráfordítás 1.000 Ft plusz termelési értéket? Azaz a nyereség mikor lesz 0?
  - (3) Hol lesz maximális az 1 000 Ft ráfordításra eső termelési növekedés?
  - (4) Mikor lesz az átlagos hatékonyság maximális?

*Megoldás:*

- (1) A hozam értéke ott lesz maximális, ahol  $f'(x) = 0$  és  $f''(x) < 0$ , tehát az  $f'(x) = -0,024x^2 + 1,44x + 4 = 0$  egyenletet megoldva az  $x_1 = 62,6$  és  $x_2 = -2,7$  gyököket kapjuk. Az  $x_2$  nem lehet megoldás, így ha  $x_1 = 62,6$ , akkor  $f(x_1) = 1\ 109$ . Ezt a pontot a beruházás során csak akkor célszerű elérni, ha bármilyen áron maximális hozamra törekszünk.
- (2) A nyereség akkor lesz 0, ha a függvény meredeksége 1, azaz  $f'(x) = 1$ . Ekkor a  $-0,024x^2 + 1,44x + 4 = 1$  egyenletet kell megoldanunk, azaz  $-0,024x^2 + 1,44x + 3 = 0$ , amiből adódik, hogy  $x_1 = 62$ ,  $x_2 = -2$  a megoldásai, de az  $x_2$  nem jöhet szóba.
- (3) 1 000 Ft ráfordításra eső termelési növekedés maximuma akkor van, amikor  $f'(x)$  maximális, azaz  $f''(x) = 0$ , és  $f''$  az adott pontban előjelet vált. Esetünkben az  $f''(x) = -0,048x + 1,44 = 0$  egyenletet kell megoldani. Ennek egyetlen gyöke  $x = 30$ , és ebben a pontban  $f''$  előjelet is vált. A megoldás azt jelenti, hogy a 30 000 Ft-os befektetést mindenképpen célszerű meghaladni, mert ekkor növekszik leggyorsabban a bevétel.
- (4) Adott pontbeli átlagos hatékonyságról kimutatható, hogy megegyezik az origótól a ponthoz húzott szelő meredekségével. Ez akkor maximális, ha a szelő éppen érinti a görbét. Mivel a görbét érintő egyenes meredeksége a derivált, ezért a következő egyenlet megoldására vezetjük vissza a problémát:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Meg kell tehát oldanunk az

$$-0,024x^2 + 1,44x + 4 = \frac{-0,008x^3 + 0,72x^2 + 4x}{x}$$

egyenletet, melynek a megoldása:  $x = 45$ .

Ez azt jelenti, hogy 45 000 Ft-os befektetésnél lesz maximális az átlagos hatékonyság, azaz eddig a pontig érdemes elmenni a befektetéssel.

## DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI: SZÖVEGES SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK, ELASZTICITÁS

---

2. Tegyük fel, hogy az őszibarack  $x$  ára, és a vásárlók  $f(x)$  igénye között az alábbi összefüggés van:

$$f(x) = \frac{1000}{x + 10}.$$

Hány %-kal változik a kereslet, ha az árat  $x = 150$  Ft-ról 5%-kal megnöveljük, vagy ha 3%-kal lecsökkentjük?

*Megoldás:*

Mivel

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x), \text{ és } f'(x) = \frac{-1000}{(10 + x)^2},$$

így

$$E(x) = x \cdot \frac{x + 10}{1000} \cdot \left[ \frac{-1000}{(10 + x)^2} \right] = \frac{-x}{x + 10},$$

$$E(150) = \frac{-150}{160} \approx -0,94.$$

Ez azt jelenti, hogy az ár 1%-os növekedéséhez a kereslet -0,94-os növekedése (azaz csökkenése) tartozik. 5%-os árnövekedés esetén:  $5 \cdot (-0,94)\% = -4,7\%$ , azaz 4,7%-os keresletcsökkenés mutatkozik, míg ha az ár 3%-kal csökken, akkor  $-3 \cdot (-0,94)\% \approx 2,8\%$ , vagyis közel 2,8%-os az igénynövekedés.

### 3 Gyakorló feladatok

1. Oldja meg a következő szélsőérték-feladatokat!

1. Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez  $2 \text{ m}^2$  területű lemezt használtunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy a térfogata a legnagyobb legyen, és mekkora ez a legnagyobb térfogat?
2. Egy felül nyitott, henger alakú  $2 \text{ m}^3$  térfogatú mérőedényt akarunk készíteni. Hogyan válasszuk az edény alapsugarát és magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk fel, és mennyi lesz a felhasznált hosszmenyiség?
3. Adott  $V$  térfogatú, négyzet alapú egyenes hasáb élei milyen méretűek legyenek, hogy a felülete minimális legyen?
4. Egy gazdaság  $2.500 \text{ m}^3$  termény befogadására alkalmas egyenes henger formájú alul-felül zárt gabonasilót készített. Milyenek legyenek a méretei, hogy a legkevesebb anyagfelhasználásával lehessen elkészíteni?
5. Vízparton egy  $500 \text{ m}^2$  területű téglalap alakú részt akarnak 3 oldalról elkeríteni. Mekkora legyen a téglalap oldalai, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükség?
6. Milyen méretezésű legyen a  $3\pi \text{ m}^3$  térfogatú konzervdoboz, amely előállításához a legkevesebb anyag kell?
7. A raktározási költség a raktározott mennyiség ( $x$ ) és egy állandó költség függvénye az  $f(x) = 40x^2 + 8.000$  képlet szerint. Hány százalékkal változna a raktározási költség, ha a jelenlegi  $1\ 000$  db raktározott mennyiséget

## DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI: SZÖVEGES SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK, ELASZTICITÁS

---

- a) 3%-kal növelnék?
  - b) 2%-kal csökkentenék?
8. Tegyük fel, hogy az egy főre jutó havi húsfogyasztást (kg-ban kifejezve) az egy főre jutó havi nettó jövedelem ( $x$ ) (ezer ft-ban kifejezve) függvényében az  $f(x) = 0,1x - 2$  függvény írja le. Számítsa ki ezen függvény esetében a függvény rugalmasságát az  $x=80$  helyen. Mit jelent a kapott eredmény?