

## 1 Ellenőrző kérdések

1. Adja meg a rendezett pár fogalmát.
2. Mit értünk a H és K nemüres halmazok Descartes szorzatán?
3. Hogyan szemléltethetjük a Descartes szorzatot?
4. Mit ért rendezett szám n-esen?
5. Definiálja a reláció fogalmát!
6. Mit értünk a reláció értelmezési tartományán, értékkészletén és inverzén?
7. Adja meg az összetett reláció fogalmát.
8. Mi a függvény, és hogyan lehet megadni egy függvényt?
9. Mit értünk egy függvény értelmezési tartományán és értékkészletén?
10. Definiálja a kölcsönösen egyértelmű leképezés fogalmát.
11. Mit értünk a függvény inverzén?
12. Mikor mondjuk, hogy két halmaz egyenlő számosságú?
13. Mikor mondjuk, hogy a H halmaz véges halmaz?
14. Mikor mondjuk, hogy a H halmaz végtelen halmaz?
15. Adja meg, hogy a H halmazt mikor nevezzük megszámlálhatatlannul végtelennek, ill. megszámlálhatónak?

## 2 Példák

1. Határozza meg az alábbi f reláció értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!  $A := \{-5, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ,  $B := \{-2, 1, 2, 3\}$ ,  $f \subseteq A \times B$  és x f relációban áll y-nal akkor és csakis akkor, ha  $x + y = 7$ .

Megoldás:

$$\text{Mivel } f = \{(4,3), (5,2), (9,-2)\} \\ D_f = \{4, 5, 9\}, R_f = \{-2, 2, 3\}, f^{-1} = \{(3,4), (2,5), (-2,9)\}.$$

2. Legyenek adottak a következő halmazok:  $H = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  és  $K = \{-1, 0, 1, 2\}$  és  $L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Adja meg a  $q' \circ q$  relációt, ha

$$q = \{(h,k) \in H \times K \mid |h| = k\} \\ q' = \{(k,l) \in K \times L \mid k + 3 = l\}$$

Megoldás:

$$q = \{(-2,2); (-1,1); (0,0); (1,1); (2,2)\}, q' = \{(-1,2); (0,3); (1,4)\}.$$

$$\text{Ekkor a definíció alapján: } q' \circ q = \{(-1,4); (0,3); (1,4)\}.$$

3. Tekintse az  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  és az  $Y = \{0, 1, 2\}$  halmazokat. Legyen adott a következő reláció  $f = \{(x,y) \in X \times Y \mid |x| = y\}$ . Döntse el, hogy az f reláció függvény-e, ha igen, akkor invertálható-e.

Megoldás:

Az  $f = \{(-2,2); (-1,1); (0,0); (1,1); (2,2)\}$  reláció függvény, mivel egyértelmű. Az inverz reláció  $f^{-1} = \{(2,-2); (1,-1); (0,0); (1,1); (2,2)\}$  nem egyértelmű, így nem függvény, azaz f nem invertálható függvény.

## HALMAZOK, NEVEZETES SZÁMHALMAZOK

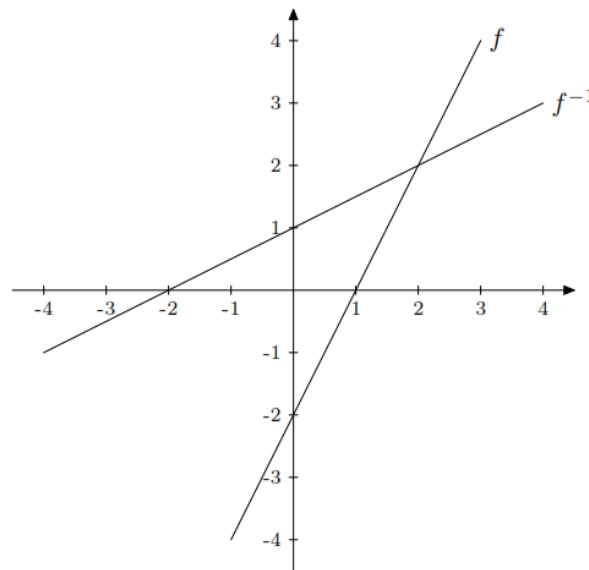
4. Vizsgáljuk meg, hogy az  $f(x) = 2x-2$  függvénynek van-e inverze, és ha van adjuk meg az inverz függvényt, és ábrázoljuk a függvényeket!

*Megoldás:*

Mivel az  $f$  függvény kölcsönösen egyértelmű, így van inverze. Az  $y = f(x)$ -ből fejezzük ki az  $x$ -e, majd hajtsunk végre változócsereét, azaz:

$$y = f(x) \Rightarrow y = 2x-2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{2} = \frac{1}{2}y+1.$$

Ezután  $y$  helyére  $x$ -et írva kapjuk, hogy  $y = \frac{1}{2}x+1$ , így  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x+1$ .



### 3 Gyakorló feladatok

#### 3.1 Descartes-szorzat

1. Legyen  $A = B = \{0,1,2\}$ . Határozza meg az  $A \times B$  halmazt!
2. Hány elemből áll az  $(A \times A) \times A$  halmaz, ha  $A = \{1,2,3,4\}$ ?
3. Hány közös eleme van az  $A \times B$  és  $B \times A$  halmaznak, ha  $A = \{0,1,2,3\}$ ,  $B = \{0,1,2,4\}$ ?
4. Legyen  $A = \{1,3,5,7,9\}$  és  $B = \{2,4,6,8\}$ . Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az  $A \times B$  halmazt!
5. Legyen  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{1,2,3\}$ . Írja fel az
  - a)  $(A \times B) \cap (B \times A)$
  - b)  $(A \times B) \setminus (B \times A)$  halmazokat!

### 3.2 Relációk, értelmezési tartomány, értékkészlet, inverz

- Határozza meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét, majd ábrázolja őket derékszögű koordináta-rendszerben! Döntse el, hogy melyik reláció függvény! Határozza meg, hogy melyik invertálható és írja fel az inverzét is!

a)  $A = \{0,1,2\}$ ,  $B = \{0,3,5\}$  és  $\rho = \{(x,y) \in A \times B \mid x \cdot y = 0\}$ .

b)  $A = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ ,  $B = \{-2,-1,0,1\}$  és  $\rho = \{(x,y) \in A \times B \mid |x+y| = 1\}$ .

c)  $A = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $B = \{2,4,6,8,10\}$  és  $\rho = \{(x,y) \in A \times B \mid x|y\}$

### 3.3 Nevezetes relációk

- Döntse el, hogy a  $\rho = \{(x,y) \in N \times N \mid x|y\}$  reláció ekvivalencia-reláció vagy rendezési reláció!
- Határozza meg, hogy a következő relációk közül melyek ekvivalencia-relációk vagy rendezési relációk!

a)  $\rho = \{(x,y) \in N \times N \mid 3|y-x\}$

b)  $\rho = \{(x,y) \in A \times A \mid x \text{ párhuzamos } y\text{-nal}\}$ , ahol  $A$  egy adott sík egyenesinek a halmaza

c)  $\rho = \{(x,y) \in A \times A \mid x \text{ hasonló } y\text{-nal}\}$ , ahol  $A$  egy adott sík háromszögeinek a halmaza

### 3.4 Összetett relációk

- Adottak a  $\rho_1$  és  $\rho_2$  relációk. Határozza meg a  $\rho_1 \circ \rho_2$  reláció elemeit!

a)  $A = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $B = \{-2,-4,-5\}$ ,  $C = \{2,4,8,16,32,64,128\}$ .

$$\rho_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid -x = y\}, \rho_2 = \{(y,z) \in B \times C \mid y^2 = z\}.$$

b)  $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ ,  $B = \{-1,0,2\}$ ,  $C = \{0,1,2,3,4\}$ .

$$\rho_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid |x| = y\}, \rho_2 = \{(y,z) \in B \times C \mid y+3 = z\}.$$

c)  $A = \{2,3,4\}$ ,  $B = \{2,4,6,8,10\}$ ,  $C = \{0,-1,-2,-3\}$ .

$$\rho_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x|y\}, \rho_2 = \{(y,z) \in B \times C \mid -\frac{y}{2} = z\}.$$

**3.5 Inverz függvény**

1. Írja fel az alábbi függvények inverzeit!

a)  $y = 2x$

b)  $y = 1 - 3x$

c)  $y = 2x^2 - 1$

d)  $y = \frac{1}{1-x}$

e)  $y = \frac{1}{x}$

f)  $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

g)  $y = \frac{1-x}{1+x}$

h)  $y = 3^x$

2. Állapítsa meg milyen függvényekből tehetők össze az alábbi közvetett függvények és határozza meg a  $D_f$  és  $R_f$  értékeket is!

a)  $f_1(x) = \sin(3x+1)$

b)  $f_2(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 5}$

c)  $f_3(x) = \frac{1}{4x^2 - 12x + 5}$

d)  $f_4(x) = \cos \sqrt{x+2}$

**3.6 Összetett függvények, függvények összetétele**

1. Írja fel a  $g(f(x))$  összetett függvényt, ha

a)  $f(x) = x^2 + x + 1$

$g(x) = x^2$

b)  $f(x) = x^2$

$g(x) = x^2 + x + 1$

c)  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

$g(x) = \sqrt{x+1}$

d)  $f(x) = x^2 + 1$

$g(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

e)  $f(x) = \sin 2x$

$g(x) = \sin 2x$

f)  $f(x) = \lg x$

$g(x) = \frac{1}{\lg x}$

2. Bontsa fel belső és külső függvényekre az alábbi függvényeket!

a)  $F(x) = \sin^2 x$

b)  $F(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 1}$

c)  $F(x) = \lg \operatorname{tg} 2x$

d)  $F(x) = \operatorname{ctg}^2(2x-1)$