

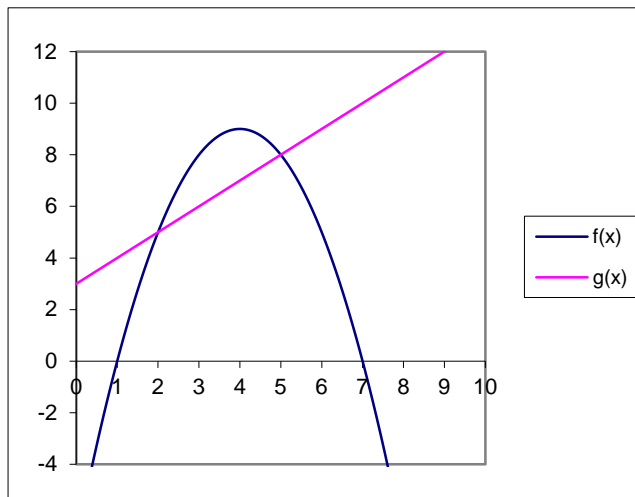
1 Ellenőrző kérdések

1. Mit ért beosztáson, beosztáshoz tartozó alsó-, ill. felső összegzen?
2. Írja fel a Darboux-féle alsó-, ill. felső integrált!
3. Mi a Riemann-integrál?
4. Sorolja fel a Riemann-integrálra tanult tételeket!
5. Mik azok a középérték-tételek?
6. Írja fel a Newton-Leibniz formulát és magyarázza el a jelentését!
7. Soroljon fel integrálszámítás alkalmazásokat!
8. Hogyan alkalmazható az integrálás görbék által határolt terület kiszámítására?
9. Hogyan alkalmazható az integrálás ívhossz kiszámítására?
10. Hogyan alkalmazható az integrálás térfogat kiszámítására?

2 Példák

1. Mekkora az $f(x) = -x^2 + 8x - 7$ és $g(x) = x + 3$ görbék által bezárt terület?

Megoldás:



A $-x^2 + 8x - 7 = x + 3$ egyenlet megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, tehát kiszámítandó:

$$\int_2^5 (-x^2 + 8x - 7) dx - \int_2^5 (x + 3) dx =$$

$$= \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} - 10x \right]_2^5 =$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + 7 \cdot \frac{5^2}{2} - 10 \cdot 5 \right) - \left(-\frac{3^3}{3} + 7 \cdot \frac{3^2}{2} - 10 \cdot 3 \right) =$$

$$= \frac{10}{3} = 3,3$$

2. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amelyet $f(x) = \sqrt{x}$ függvénygörbe $[1, 2]$ intervallum feletti ívének megforgatásakor kapunk?

Megoldás:

$$\text{A térfogat: } V = \pi \int_1^2 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^2 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2} \pi \approx 4,71$$

3 Gyakorló feladatok

3.1 Határozott integrál

1. Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékét!

a) $\int_0^2 x^2 - x^3 - 6x dx$

b) $\int_0^2 x^2 - \sqrt{x} \, dx$

c) $\int_1^2 3x + \frac{2}{x} - x^2 \, dx$

d) $\int_2^3 x^2 - 6x - 2 \, dx$

e) $\int_1^2 x^3 - 3x^2 \, dx$

3.2 Integrálszámítás alkalmazása: síkidomok területének meghatározása

1. Határozza meg az f és a g függvények által határolt síkidom területét!

a) $f(x) = \sqrt{x} + 2$, $g(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = x^3 + 1$

c) $f(x) = 4x - 6$, $g(x) = x^2 - x$

d) $f(x) = 2x - 2$, $g(x) = x^2 - x$

e) $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 + 2$