Integrálszámítás

Dr. Vincze Szilvia

15. Határozatlan integrál

15.1 Primitív függvény, határozatlan integrál

15.2 Alapintegrálok

15.3 Integrálási szabályok

- 15.3.1 Összeg/különbség integrálása
- 15.3.2 Parciális integrálás
- 15.3.3 Helyettesítéses integrálás

Bevezető gondolatok

- Integrálszámítás: a matematikai analízis másik fontos területe, mely a diffferenciál-számításra épül.
- Görbe vonalak által határolt síkidomok keresése során alakult ki.

15.1 Primitív függvény, határozatlan integrál

Legyenek az f, F: $]a,b[\to \mathbf{R}$ adott függvények. Az F differenciálható függvényt az f függvény **primitív függvény**ének nevezzük, ha $\mathbf{F'(x) = f(x)}$ minden $x \in]a,b[$ esetén.

15.1 Példa - primitív függvény

Adja meg a következő függvények primitív függvényeit:

$$a)\ f(x) = x^3$$

$$b)\ g(x) = sinx$$

Megjegyzések

- Ha az F primitív függvénye az f-nek, akkor az F+C is primitív függvénye minden C $\in$ **R** esetén.
- A primitív függvényt másként **határozatlan integrál**nak nevezzük.
- **Jele:** $\int f(x)dx$
- Az integrál mögötti részt **integrandus**-nak nevezzük
- Egy függvény határozatlan integrálját megadni azt jelenti, hogy az összes primitív függvényt megkeressük

15.2 Alapintegrálok

1.) $\int 1 \, \mathrm{dx} = \mathrm{x} + \mathrm{C}, \qquad \mathrm{C} \in \mathbf{R}$

2.) $\int x^n \, \mathrm{dx} = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}, \qquad \mathrm{n} \in \mathbf{R}, \mathrm{n} \neq -1$

3.) $\int \dfrac{1}{x} \mathrm{dx} = \ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C}, \qquad \mathrm{x} \neq 0$

4.) $\int a^x \, \mathrm{dx} = \dfrac{a^x}{lna} + \mathrm{C}, \qquad \mathrm{a} \in \mathbf{R}, \mathrm{a} > 0$

5.) $\int e^x \mathrm{dx} = e^x + \mathrm{C}$

15.2 Alapintegrálok

6.) $\int sinx \, \mathrm{dx} = -cosx + \mathrm{C}$

7.) $\int cosx \, \mathrm{dx} = sinx + \mathrm{C}$

8.) $\int \frac{1}{cos^2 x} \mathrm{dx} = tgx + \mathrm{C}, \quad \mathrm{x} \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k * \pi \right\}$

9.) $\int \frac{1}{sin^2 x} \mathrm{dx} = -ctgx + \mathrm{C}, \mathrm{x} \in R \setminus \{ k * \pi \}$

15.2 Alapintegrálok

$$10.)\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = arcsinx + \mathrm{C}, \mathrm{x}\ \in\ ]-1{,}1[$$

$$11.)\ \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = arccosx + \mathrm{C}, \mathrm{x}\ \in\ ]-1{,}1[$$

$$12.)\ \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = arctgx + \mathrm{C}, x \in \boldsymbol{R}$$

$$13.)\ \int \frac{-1}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = arcctgx + \mathrm{C}, x \in \boldsymbol{R}$$

15.3.1 Integrálási szabályok: összeg

Legyenek az f, g:]a,b[$\rightarrow$ **R,** λ, μ $\in$ **R** tetszőleges, és létezzék az $\int f(x)dx$ és $\int g(x)dx$, akkor

$$\int \lambda * f(x) + \mu * g(x)\ dx = \lambda * \int f(x)dx + \mu * \int g(x)\ dx$$

15.3 Példa – összeg és különbség integrálása

$$a.)\ \int 3 * x^2 - 5 * x + 9\, dx = ?$$

$$b.)\ \int \frac{x^2 - x^3 + 1}{x^5} dx = ?$$

$$c.)\ \int 5 * 3^x - 5 * cosx + \sqrt[3]{x^7} + 4 * x - 3dx =$$

$$d.)\ \int \frac{cos^2x - 5}{1 + cos2x} dx = ?$$

15.3.2 Integrálási szabályok: parciális integrálás

Legyenek az f, g:]a,b[$\rightarrow$ **R** differenciálható függvények és létezik az $\int f'(x) * g(x)dx$ határozatlan integrál, akkor létezik $\int f(x) * g'(x)dx$ is és

$$\int f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x)dx$$

Megjegyzés

A parciális integrálás képletének alkalmazása: az integrálandó függvényt kéttényezős szorzatként fogjuk fel, amelyet közül az egyiknek az f’, a másiknak a g szerepet szánjuk. Ebből kiszámítjuk az f-et és g’-t, aztán behelyettesítjük a képletbe.

15.3.2 Példa – parciális integrálás

$$a.)\ \int 2x * sinx\, dx = ?$$

$$b.)\ \int 3x^2 * e^x dx = ?$$

$$c.)\ \int x * lnx\, dx = ?$$

15.3.3 Integrálási szabályok: helyettesítéses integrálás

Legyen g:]a,b[$\rightarrow$]c,d[differenciálható, f:]c,d[$\rightarrow$ **R** és tegyük fel, hogy létezik $\int f(x)dx$. Ekkor létezik $\int (f \circ g)(t) * g'(t)dt$ és

$$\int f\big(g(t)\big) * g'(t)dt = \int f(x)dx$$

15.3.3 Példa – parciális integrálás

$$a.)\ \int (2x+3)^3 dx = ?$$

$$b.)\ \int e^{3x-5} dx = ?$$

$$c.)\ \int \sin(4x-5) dx = ?$$

Megjegyzések

- $\int f^{n}(x) * f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$

- $\int (\mathrm{f}'(\mathrm{x}))/\ f(x))\, dx = ln|f(x)| + C$

Példa

$$a.)\ \int (x^3+2)^4 * 3x^2\,dx = ?$$

$$b.)\ \int ctgx\,dx = ?$$

Köszönöm a figyelmet!