1 Ellenőrző kérdések

1. Hogyan definiálná egy függvény határértékét az értelmezési tartományának egy adott pontjában?
2. Mit értünk egy függvény $x=x_0$ pontbeli jobb, ill. bal oldali határértékén?
3. Mikor mondjuk, hogy egy függvény folytonos az $x=x_0$ helyen?
4. Mit értünk a függvény tágabb értelemben vett határértékén? (Mikor mondjuk, hogy egy függvénynek az $x=x_0$ helyen tágabb értelemben vett határértéke: ∞?)
5. Mikor mondjuk, hogy egy függvénynek a ∞-ben vett határértéke az A valós szám?
6. Mikor mondjuk, hogy egy függvény folytonos az $x=x_0$ helyen?
7. Mit értünk elsőfajú, ill. másodfajú szakadású helyen?
8. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és hamisak.
   a) A függvény x_0 helyen vett határértéke csak véges lehet.
   b) Ha az f függvény az értelmezési tartományának valamely pontjában nem folytonos, akkor ott a függvénynek szakadási helye van.

2 Példák

1. Tekintse az $f(x) = \dfrac{2x^2+2x}{x^2-1}$ függvényt és vizsgáljuk meg az x_0 = -1 helyen a bal- és jobboldali határértéket, adjuk meg a határértéket, amennyiben létezik.

Megoldás:

Az x_0 = -1 helyen a függvény nincs értelmezve, de ezt a határérték definíciója nem is követeli meg, hiszen elegendő, hogy a vizsgált hely valamely környezetében értelmezve legyen a függvény.

(1) jobboldali határérték

Ha $x_n = -1 + \dfrac{1}{n}$, akkor

$$f(x_n) = \frac{2\left(-1+\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(-1+\frac{1}{n}\right)}{\left(-1+\frac{1}{n}\right)^2 - 1} = \frac{2\left(-1+\frac{1}{n}\right)\left[-1+\frac{1}{n}+1\right]}{\left(-1+\frac{1}{n}+1\right)\left(-1+\frac{1}{n}-1\right)} =$$

$$\frac{2\left(-1+\frac{1}{n}\right)}{\left(-2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(\frac{-2n+2}{n}\right)}{\left(\frac{-2n+1}{n}\right)} = \frac{-2n+2}{n}\cdot\frac{n}{-2n+1} = \frac{-2n+2}{-2n+1}.$$

Így $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2n+2}{-2n+1} = 1.$

(2) baloldali határérték

Ha $x_n = -1 - \dfrac{1}{n}$, akkor

$$f(x_n)=\frac{2\left(-1-\frac{1}{n}\right)^2+2\left(-1-\frac{1}{n}\right)}{\left(-1-\frac{1}{n}\right)^2-1}=\frac{2\left(-1-\frac{1}{n}\right)\left[-1-\frac{1}{n}+1\right]}{\left(-1-\frac{1}{n}+1\right)\left(-1-\frac{1}{n}-1\right)}=$$

$$\frac{2\left(-1-\frac{1}{n}\right)}{\left(-2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\left(\frac{-2n-2}{n}\right)}{\left(\frac{-2n-1}{n}\right)}=\frac{-2n-2}{n}\cdot\frac{n}{-2n-1}=\frac{-2n-2}{-2n-1}.$$

Így $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n-2}{-2n-1}=1.$

Mivel a bal- és jobboldali határérték megegyezik, ezért

2. Határozza meg a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2-x-4}{x-1}$ határértéket!

Megoldás:

Mivel a számláló a következő alakba írható (például Horner-elrendezés segítségével megkeresve a gyököket) $x^3+4x^2-x-4=(x-1)(x+1)(x+4)$, így:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2-x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x+4)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}(x+1)(x+4)=$$
$$\lim_{x\to 1}1\cdot\lim_{x\to 1}(x+1)(x+4)=1\cdot 2\cdot 5=10.$$

3. Határozza meg a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-7x+9}{2x^2+1}$ határértéket!

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-7x+9}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{2},$$

felhasználva, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0$ és $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x^2}=0$ minden $c\in\mathbf{R}$ esetén.

4. Határozzuk meg az $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ függvény határértékét az $x_0=1$ szakadási helyen, majd vizsgáljuk meg a függvény folytonosságát.

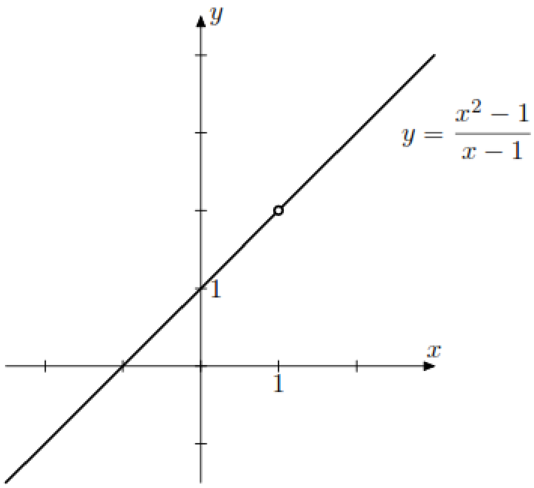
Megoldás:

Mivel a függvény az $x_0 = 1$ szakadási helyen nincs értelmezve, ezért számítsuk ki a jobb és bal oldali határértéket:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{n\to 1+0}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}=\lim_{n\to 1+0}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to 1+0}n\cdot\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to 1+0}2+\frac{1}{n}=2.$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{n\to 1-0}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2-1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)-1}=\lim_{n\to 1-0}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-1}{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to 1-0}(-n)\cdot\left(-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to 1-0}2-\frac{1}{n}=2.$$

Tehát a függvény határértéke az $x_0 = 1$ helyen 2. A függvény összes többi helyen vett határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel. A függvény nyilvánvalóan nem folytonos, mert az 1 helyen szakadása van. A szakadás azonban elsőfajú, azaz megszüntethető, mivel a bal és jobb oldali határérték létezik és megegyezik *(22. ábra)*.



3 Gyakorló feladatok

1. Adja meg a következő függvények határértékét a megadott helyeken!

a) $f(x)=\frac{3}{(x-1)^2}-2 \quad (x_0=1,\ x_0=2,\ \pm\infty)$

b) $f(x)=\frac{1}{(2x-2)^2}-1 \quad (x_0=1,\ x_0=0,\ \pm\infty)$

c) $f(x)=1+\frac{-3}{(x+2)^2} \quad (x_0=-2,\ x_0=2,\ \pm\infty)$

d) $f(x)=\frac{2}{x+3} \quad (x_0=-3,\ x_0=-1,\ \pm\infty)$

e) $f(x)=1+\frac{5}{x-1} \quad (x_0=1,\ x_0=6,\ \pm\infty)$

f) $f(x)=\frac{1}{x^2-1} \quad (x_0=\pm 1,\ x_0=2,\ \pm\infty)$

2. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^5 + 2x + 3}{x^3 + 4x - 9}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{2x}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}}{x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x + 3}\right)^{3x}$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$