1 Ellenőrző kérdések

1. Definiálja a többváltozós függvények lokális és globális maximumát és minimumát.
2. Hogyan határozhatjuk meg a többváltozós függvények feltétel nélküli szélsőértékét?

2 Példák

1. Keresse meg az $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3, (x,y) \in \mathbf{R}^2$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékét!

Megoldás:

(1) A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az elsőrendű parciális deriváltak egyenlőek legyenek 0-val. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y$ és $f'_y(x,y) = -3x + 3y^2$, így az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Az első egyenletből $y = x^2$, ezt a másodikba helyettesítve:

$$-3x + 3(x^2)^2 = 0$$
$$-3x + 3x^4 = 0$$
$$3x(-1 + x^3) = 0$$

Mivel egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így az $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$ adódik. Ha $x_1 = 0$, akkor $y_1 = 0$, és ha $x_2 = 1$, akkor $y_2 = 1$. Így az egyenletrendszer megoldásai a (0,0) és az (1,1) számpárok, ezek a lehetséges szélsőértékhelyek.

(2) A másodrendű parciális deriváltak segítségével dönthetjük el (elégséges feltétel), hogy melyek lesznek a valódi szélsőértékhelyek. Az f másodrendű parciális deriváltjai:

$f''_{xx}(x,y) = 6x$ $\quad$ $f''_{xy}(x,y) = -3$

$f''_{yx}(x,y) = -3$ $\quad$ $f''_{yy}(x,y) = 6y$

A (0,0) pontban

$f''_{xx}(0,0) = 6 \cdot 0 = 0$ $\quad$ $f''_{xy}(0,0) = -3$

$f''_{yx}(0,0) = -3$ $\quad$ $f''_{yy}(0,0) = 6 \cdot 0 = 0$

Mivel $D_1(0,0) = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$, így a (0,0) pont nem szélsőértékhely.

Az (1,1) pontban

$f''_{xx}(1,1) = 6 \cdot 1 = 6$ $\quad$ $f''_{xy}(1,1) = -3$

$f''_{yx}(1,1) = -3$ $\quad$ $f''_{yy}(1,1) = 6 \cdot 1 = 6$

Mivel $D_2(1,1) = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$, és $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$ így az f-nek az (1,1) pontban lokális minimuma van, melynek értéke: $f(1,1) = -1$.

2. Egy adott talajtípuson az átlagosnak megfelelő időjárási viszonyok között a búza hozamát hektáronként a felhasznált nitrogén és foszfor hatóanyag erősen befolyásolja. A hektáronkénti kijuttatott nitrogén hatóanyag (N) és foszfor hatóanyag (P) mennyiségét 50 kg/ha-ban mérjük. Az elérhető hozamot (H) t/ha-ban adjuk meg. A

hozam és a műtrágyák közötti függvénykapcsolat az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$f(N,P) = 1{,}855 + 0{,}75N + 0{,}247P - 0{,}066N^2 - 0{,}04P^2 + 0{,}021N \cdot P$$

Milyen nitrogén és foszfor mennyiség esetén lesz maximális a hozam?

Megoldás:

Készítsük el a függvény elsőrendű parciális deriváltjait és tegyük egyenlővé 0-val:
$f'_N(N,P) = 0{,}75 - 0{,}132N + 0{,}021P = 0$ és $f'_P(N,P) = 0{,}247 - 0{,}08P + 0{,}021N = 0$.

Az első egyenletből P-t kifejezve $\left(P = \dfrac{-0{,}75 + 0{,}132N}{0{,}021} \right)$ és a második egyenletbe beírva kapjuk, hogy:

$$0{,}247 - 0{,}08 \cdot \frac{-0{,}75 + 0{,}132N}{0{,}021} + 0{,}021N = 0.$$

Az egyenletet megoldva N = 6,44 adódik, amiből P = 4,78. Vizsgáljuk meg a másodrendű parciális deriváltak segítségével a sarokdeterminánsok előjelét. Mivel

$$D(6{,}44;4{,}78) = \begin{vmatrix} f''_{NN}(6{,}44;4{,}78) & f''_{NP}(6{,}44;4{,}78) \\ f''_{PN}(6{,}44;4{,}78) & f''_{PP}(6{,}44;4{,}78) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}132 & 0{,}021 \\ 0{,}021 & -0{,}08 \end{vmatrix},$$

így $D(6{,}45;4{,}83) = (-0{,}132) \cdot (-0{,}08) - 0{,}021^2 = 0{,}011 > 0$, $D_1(6{,}45;4{,}83) = -0{,}132 < 0$ és $f''_{xx}(6{,}44;4{,}78) = -0{,}132 < 0$. Tehát a függvénynek maximuma van az N = 6,44 és P = 4,78 értékeknél és f(N,P) = 4,86.

3 Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a következő függvények lokális szélsőértékeit!

(a) $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$	$f_{max}(1,2) = 9$
(b) $z = 2x + 3 - x^2 - y^2$	$f_{max}(1,0) = 4$
(c) $z = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$	$f_{min}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -1{,}75$
(d) $z = x^2 + y^2 + xy + y + \frac{1}{3}$	$f_{min}\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) = 0$
(e) $z = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2$	$f_{min}\left(\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right) = -9\frac{13}{27}$
(f) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{xy}{27}$	$f_{min}(3,3) = 1$
(g) $z = 2y^3 + x^2y + 5y^2 + x^2 + 1$	$f_{min}(0,0) = 1$, $f_{max}\left(0,-\frac{5}{3}\right) = 5\frac{17}{27}$
(h) $z = y^3 + 3y^2 + 4xy + x^2 + 1$	$f_{min}\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{27}$
(i) $z = x^2y^3(1 - x - y)$	$f_{max}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{432}$

(j) $z = y^2x - 3xy + 2x^4$ $\quad f_{\min}\left(\frac{3}{2}, \sqrt[3]{\frac{9}{32}}\right) \approx -1{,}106$

(k) $z = 2xy - 4x^2 - y^2 + x^3$ $\quad f_{\max}(0,0) = 0$

(l) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ $\quad f_{\min}\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right),\ f_{\min}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

(m) $z = \frac{50}{x} + \frac{20}{y} + xy, \quad x > 0,\ y > 0$ $\quad f_{\min}(5,2) = 30$

(n) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ $\quad f_{\min}(1,1) = -1$

(o) $z = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy$ $\quad f_{\min}(2,5) = 30$

(p) $z = (1-x)^2 + (2+y)^2 - 4$ $\quad f_{\min}(1,-2) = -4$

(q) $z = y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy$ $\quad f_{\max}(0,0) \approx 0$

(r) $z = x^3 + (y+1)^3 - 3x(y+1)$ $\quad f_{\min}(1,0) = -1$

(s) * $\quad z = e^{-\left(x^2 - 2xy + 2y^2\right)}$ $\quad f_{\max}(0,0) = 1$

(t) * $\quad z = \frac{x+y}{x \cdot y} + \frac{xy}{27}$ $\quad f_{\min}(3,3) = 1$

(u) * $\quad z = e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 - 2x + 1\right)}$ $\quad f_{\max}(1,0) = 1$

(v) * $\quad z = (3 - 2x + y) \cdot e^{-y^2}$ $\quad$ nincs szélsőértékhelye

(w) $z = x^2 + (y-1)^2$ $\quad f_{\min}(0,1) = 1$

(x) * $\quad z = x^2 + y^2 + ax + by + c$ $\quad P_{\min}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

(y) * $\quad z = x^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d \qquad a \neq 0$

ha $a > 0$, akkor a függvénynek a $P_{\min}\left(-b, -\frac{c}{a}\right)$ pontjában maximuma van, ha $a < 0$, akkor $P\left(-b, -\frac{c}{a}\right)$ nem szélsőérték-hely

(z) * $\quad z = ax^2 + 2bxy \qquad (ab \neq 0)$ $\quad$ nincs szélsőértékhelye

2. Adja meg a következő háromváltozós függvények szélsőérték-helyeit és szélsőértékét.

(aa) $\quad z = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z$ $\quad f_{\min}(1,2,4) = -9$

(bb) $\quad z = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 12$

(cc) $\quad z = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ $\quad f_{\min}(24,-144,-1) = -6913$

(dd) $\quad z = -x^2 + 6x - 2y^2 - 8y - 4z^2 - 4zy$ $\quad f_{\max}(3,-4,2) = 25$

(ee) $\quad z = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x, y, z > 0$ $\quad f_{\min}\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$

(ff) * $\quad z = e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2\right)}$ $\quad f_{\max}(1,0,-1) = 1$

3. Oldja meg a következő szöveges szélsőrték-feladatokat!

1. Egy csokoládégyár M és N elnevezéssel két új "szeletkülönlegességet" hozott forgalomba. Az M önköltsége darabonként 25 Ft, az N önköltsége pedig 30 Ft. A piackutatás során azt találták, hogy ha x_1 illetőleg x_2 a szeletfajták jelenlegi, darabonkénti eladási ára, akkor az M iránti heti kereslet ezer darabokban az $m = 5(x_2 - x_1)$, az N irántié pedig az $n = 30 + 5x_1 - 5{,}75x_2$ függvények írják le. Hány Ft-ban kell a darabonkénti eladási árat a gyárnak megállapítania, ha maximális összbevételt akar elérni?

2. Egy vállalatnál hat hónapon keresztül vizsgálták, hogyan alakul a forgalom és a költségszint. A következő táblázat a megfigyelés eredményeit mutatja:

Forgalom (millió Ft)	**Költségszint (%)**
10	4,0
14	3,0
20	2,5
22	2,5
28	2,0
32	1,5

Melyik az az egyenes, amelyik a legkisebb hibával illeszthető rá a hat pontból álló ábrára?