

GAZDASÁGI MATEMATIKA ÖSSZEFOGLALÓ FELADATOK
2015. november 2.

1. HALMAZOK, NEVEZETES SZÁMHALMAZOK

1.1 Legyenek adottak a következő halmazok:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 4 \leq 0\},$$

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x - 1 \geq 0\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-3}{x+2} < 0\right\},$$

$$\mathcal{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{x-4} > 0\right\},$$

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \leq 0\},$$

$$\mathcal{F} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-5x+6}{x+1} \leq 0\right\}.$$

- a) Határozza meg az $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ halmazok elemeit.
b) Adja meg a következő halmazműveletek eredményeit: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B},$

$$\begin{aligned} & \bar{\mathcal{A}} \cup \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{A}} \cap \bar{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}, \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}, \mathcal{B} \cap \mathcal{E}, \bar{\mathcal{B}} \cap \bar{\mathcal{E}}, \overline{\bar{\mathcal{B}} \cap \bar{\mathcal{E}}}, \mathcal{B} \cup \mathcal{E}, \bar{\mathcal{B}} \cup \bar{\mathcal{E}} \\ & \overline{\bar{\mathcal{B}} \cup \bar{\mathcal{E}}}, \mathcal{A} \cap \mathcal{F}, \bar{\mathcal{A}} \cap \bar{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}, \mathcal{A} \cup \mathcal{F}, \bar{\mathcal{A}} \cup \bar{\mathcal{F}}, \overline{\bar{\mathcal{A}} \cup \bar{\mathcal{F}}}, \mathcal{B} \cup \mathcal{D}, \mathcal{B} \cap \\ & \mathcal{D}, \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}, \mathcal{E} \setminus \mathcal{B}, \mathcal{C} \cap \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

1.2 Legyen az alaphalmaz $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 25\}$. Legyenek továbbá adottak a következő halmazok:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{H} \mid x \text{ páros}\},$$

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{H} \mid x \text{ egyjegyű szám}\},$$

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{H} \mid 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

- a) Rajzolja fel az $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ halmazok Venn-diagramját.
b) Adja meg az $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \setminus \mathcal{C}, (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\bar{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{C}), \overline{\bar{\mathcal{C}} \cup \bar{\mathcal{B}}}$ halmazok elemeit és számosságát!

2. RELÁCIÓK

2.1 Határozza meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét, majd ábrázolja őket derékszögű koordináta-rendszerben! Határozza meg, az inverz reláció elemeit is! Döntse el, hogy melyik reláció függvény!

a) $\mathcal{A} = \{-1, 1, 2\}$, $\mathcal{B} = \{0, 3, 4\}$ és $\rho = \{(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \mid x \cdot y = 0\}$.

b) $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B} = \{2, 3, 4, 6\}$, $\rho = \{(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \mid x + 1 = y\}$.

3. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK ÉS JELLEMZÉSÜK

3.1 Adja meg a következő függvények értelmezési tartományát!

a) $f_1(x) = -x^3 + x^2$

b) $f_2(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$

c) $f_3(x) = \ln(x^2 - 1)$

d) $f_4(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-4}}$

e) $f_5(x) = \frac{x-1}{\ln(2x+3)}$

f) $f_6(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x-1}}$

g) $f_7(x) = \sqrt{2x-4} - \log_2(-x+3)$

h) $f_8(x) = \log_{x-2}(x^2 - 3x - 4)$

i) $f_9(x) = \sqrt{-x^2 + 2x} - \frac{1}{x-5}$

3.2 Adja meg az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ zérushelyeit.

3.3 Vizsgálja meg, hogy a lenti függvény korlátos-e. Korlátosság esetén adjon meg egy (alsó vagy felső, vagy alsó és felső) korlátot. Vegye figyelembe a zárójelben szereplő, értelmezési tartományra vonatkozó kikötést is.

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}, x > -3$$

3.4 Adja meg, hogy lenti függvények párosak, vagy páratlanok-e.

a) $f_1(x) = x \cdot \sin^2 x - x^3$

b) $f_2(x) = 5x^2 - 7 \cos x + 4,5$

3.5 Bontsa összetevőire a $F(x) = \sqrt{x+1}$ függvényt (ha $F(x) = g(f(x))$). Ábrázolja a $g(x)$ és $f(x)$ függvényeket, és jellemezze a $g(x)$ függvényt (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, monotonitás, korlátosság, szélsőérték, alaki tulajdonság, paritás, periodicitás).

3.6 Legyen az $f(x) = 3^x$ és $g(x) = (x+3)^2 - 2$ függvény. Írja fel az $f \circ g$ és $g \circ f$ függvényeket. Állapítsa meg, hogy az f és g függvények invertálhatóak-e, indokolja válaszát. Amennyiben f invertálható ábrázolja inverzével együtt közös koordináta-rendszerben.

3.7 Állapítsa meg, hogy az $f_2 : D_{f_2} = [-5, 4] : f_2(x) = \sqrt{x+5} - 3$ függvény invertálható-e. Amennyiben igen, adja meg az inverz függvényt és ábrázolja a függvényeket közös koordináta-rendszerben.

3.8 Írja fel a következő függvények inverzeit! Ábrázolja a függvényeket és inverzeiket egy koordináta rendszerben.

a) $f_1(x) = -2x + 3$

b) $f_2(x) = 3^x$

c) $f_3(x) = \sqrt{x+2}$

d) $f_4(x) = x^2 - 1$, ha a $D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$

3.9 Ábrázolja és jellemezze a következő függvényeket:

a) $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 3$

b) $f_2(x) = \frac{3}{4}x + 2$

c) $f_3(x) = 2^x - 3$

d) $f_4(x) = \frac{1}{x-5} + 1$

e) $f_5(x) = \sqrt{x+3} - 1$

f) $f_6(x) = -2 \cdot |x+3| - 1$

g) $f_7(x) = -\frac{3}{(x-5)^2} + 1$

h) $f_8(x) = \log_2(x+1) - 2$

4. SOROZATOK

4.1 Jellemezze az $a_n = 1 - 2n^2$, a $b_n = \frac{2n+1}{n+1}$ és $c_n = 1 - n - n^2$ sorozatokat monotonitás, korlátosság, szélsőérték és határérték szempontjából!

4.2 Adja meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n - n^2)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - n - n^2}{n^2 + 2} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - n + n^3}{-n + 2} \right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1 - n - n^2}}{n + 2} \right)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 2} - 2n \right)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n + 3}{n + 1} \right)^{2n+3}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{n^2 + 3n} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^3 - 2n + 2}}{\sqrt{n^2 + 6n}} - \left(1 - \frac{3}{4n + 5} \right)^{-n+3} \right)$

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

5.1 Adja meg a következő függvények határértékét!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x + x^2)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + 2x + x^2}{-x + 3} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^3 + 3x + 2}}{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 4x + 3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(1 - \frac{2}{x - 3} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x + 3} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x + 3} \right)^{2x+2}$

5.2 Adja meg a következő függvények határértékét a megadott helyeken és ábrázolja a függvényeket!

a) $f(x) = 1 + \frac{5}{x-1}$ ($x_0 = 1, x_0 = 6, \pm \infty$)

b) $f(x) = 1 + \frac{5}{x-1}$ ($x_0 = 1, x_0 = 6, \pm \infty$)