Matematika I.

Dr. Vincze Szilvia; vincze@fin.unideb.hu
http://vinczeszilvia.wix.com/vinczeszilvia

I. féléves tematika

1. Halmazelmélet
2. Nevezetes számhalmazok
3. Relációk és függvények
4. Egyváltozós valós függvények és jellemzőjük
5. Elemi függvények
6. Sorozatok, sorozatok határértéke
7. Pénzügyi számítások
8. Függvény határértéke és folytonossága
9. Differenciálszámítás és alkalmazásai
   - 8.1 Differenciálszámítás alapjai
   - 8.2 Magasabbrendű deriváltak, L'Hospital szabály
   - 8.3 Szélsőérték-számítás, elaszticitás
   - 8.4 Teljes függvényvizsgálat

Halmazelméleti alapfogalmak

1. HALMAZELMÉLET

1.1 A halmaz fogalma, jelölések
1.2 Halmazok megadása
1.3 Részhalmaz, hatványhalmaz
1.4 Halmazok szemléltetése (Venn-diagram)
1.5 Műveletek halmazokkal
(unió, metszet, komplementer, különbség, szimmetrikus különbség)

1.1 Halmaz fogalma, jelölések

- A **halmaz** fogalmát nem definiáljuk, tulajdonságaival körülírt alapfogalomnak tekintjük.
- A halmazt alkotó dolgok a **halmaz elemei**.
- Az olyan halmazokat, melynek egyetlen elemük sincs **üres halmaz**oknak **(jelölés: ∅)**, azt a halmazt amely minden elemet tartalmaz **alaphalmaz**nak **(jelölés: U)** nevezzük.

1.1 Halmaz fogalma, jelölések

- **Véges és végtelen halmazok**
- **Matematikai értelemben adottnak tekinthető halmaz**

Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyek határoznak meg matematikai értelemben vett halmazt!

H: = { x| x valós szám és $x^2=-4$ }

K: = { a Debreceni Egyetem $50m^2$-nél nagyobb helyiségei }

L: = { prímszámok }

M: = { x| x páratlan természetes szám és $x < 10$ }

N: = { a világ legnagyobb kikötővárosai }

O: = { x| x város és lakossága 2000. január 1-jén több, mint 500.000 fő }

P: = { tehetséges matematikusok }

1.2 Halmaz megadása

Halmazok megadása:

a) elemeinek felsorolásával;

b) elemeit a rájuk jellemző pontos tulajdonsággal írjuk le.

Példa: Halmaz megadása elemeinek felsorolásával

H: = { 2; 4, 6, 8, 10 }

K: = { orrszarvú, orángután, oroszlán}

Jelölések

$H := \{ x | \ x \text{ valós szám és } x^2 = -4 \}$

$H := \{ x | \ x \in \mathbf{R} \text{ és } x^2 = -4 \}$

Jelölések:

$\mathbf{2 \in H}$ „a kettő eleme a H halmaznak”

$\mathbf{3 \notin H}$ „a 3 nem eleme a H halmaznak”

Példa: Halmaz megadása tulajdonságával

Fogyasztói elmélet: **költségvetési halmaz**

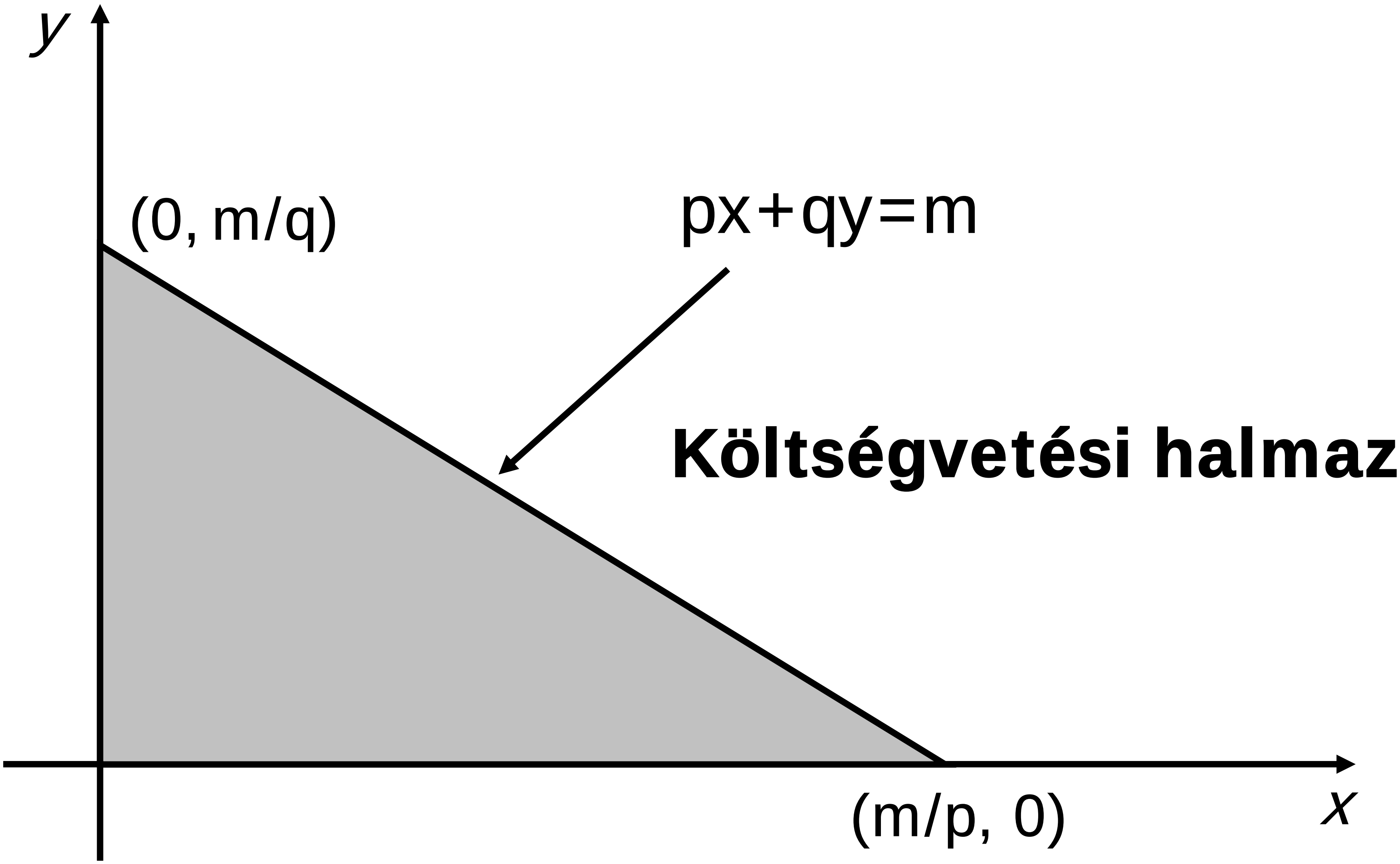
Tegyük fel, hogy kétféle árucikket szeretnénk vásárolni: az elsőből **x**, a másodikból **y** mennyiséget, és az árak rendre **p** és **q**.
Összesen **m** nagyságú összeg áll rendelkezésünkre az árucikkek megvásárlására.

Példa: Halmaz megadása tulajdonságával

- **Jószágkosár:** az árucikkek mennyiségeiből álló **(x,y)** rendezett pár.
- **Jószágkosár értéke**: **px+qy**
- **Költségvetési feltétel: px+qy ≤ m**
- **Költségvetési halmaz** (B) az összes olyan **(x,y)** jószágkosárból áll, amely kielégíti az **px+qy ≤ m** és **x≥0, y≥0** egyenlőtlenségeket.

$$B = \{ \underbrace{(x,y)}_{\text{általános elem}} \mid \overbrace{px+qy \le m,\ x \ge 0,\ y \ge 0}^{\text{definiáló tulajdonság}} \}$$

Példa: Halmaz megadása tulajdonságával



Példa: Halmazok egyenlősége

Két halmaz egyenlő, ha ugyanazokból az elemekből áll.

Mely halmazok egyenlők?

A: = { 2, 4, 6, 8 }

B: = { páros természetes számok }

C: = { $n \leq 10$ | n természetes szám és páros }

D: = { $n < 10$ | n természetes szám és páros }

1.3 Részhalmaz, hatványhalmaz

- **Részhalmaz, valódi részhalmaz**
  (Jelölés: $\subseteq$, $\subset$)

- **Triviális részhalmaz**

- **A „tartalmazás" tulajdonságai** (reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív)

- **Halmazok egyenlősége (Jelölés: H = K)**

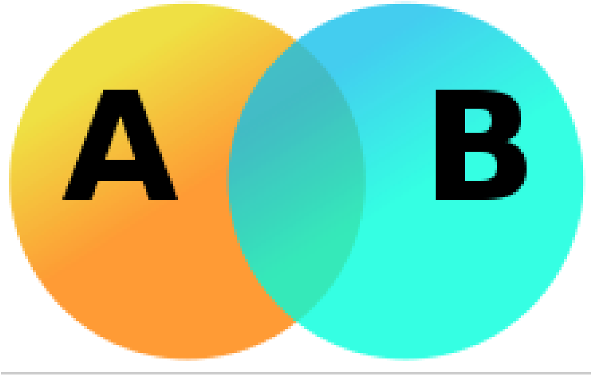
1.3 Részhalmaz, hatványhalmaz

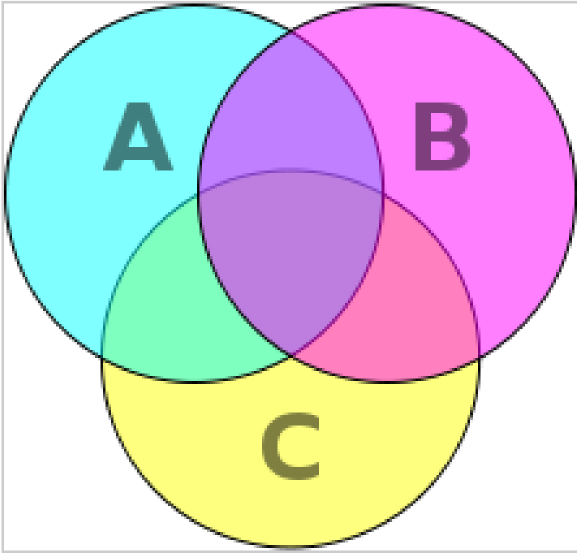
Hatványhalmaz: Egy adott H halmaz összes részhalmazainak halmaza.

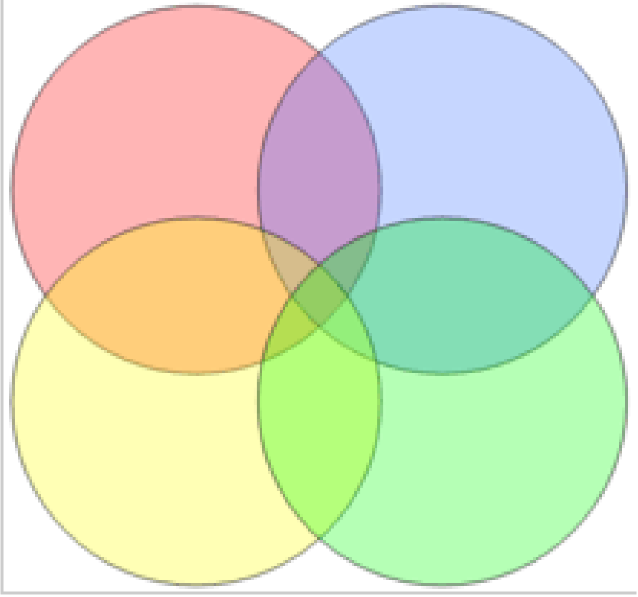
Jelölés: $P(H)$, 2^H

1.4 Halmazok szemléltetése

Venn-diagram







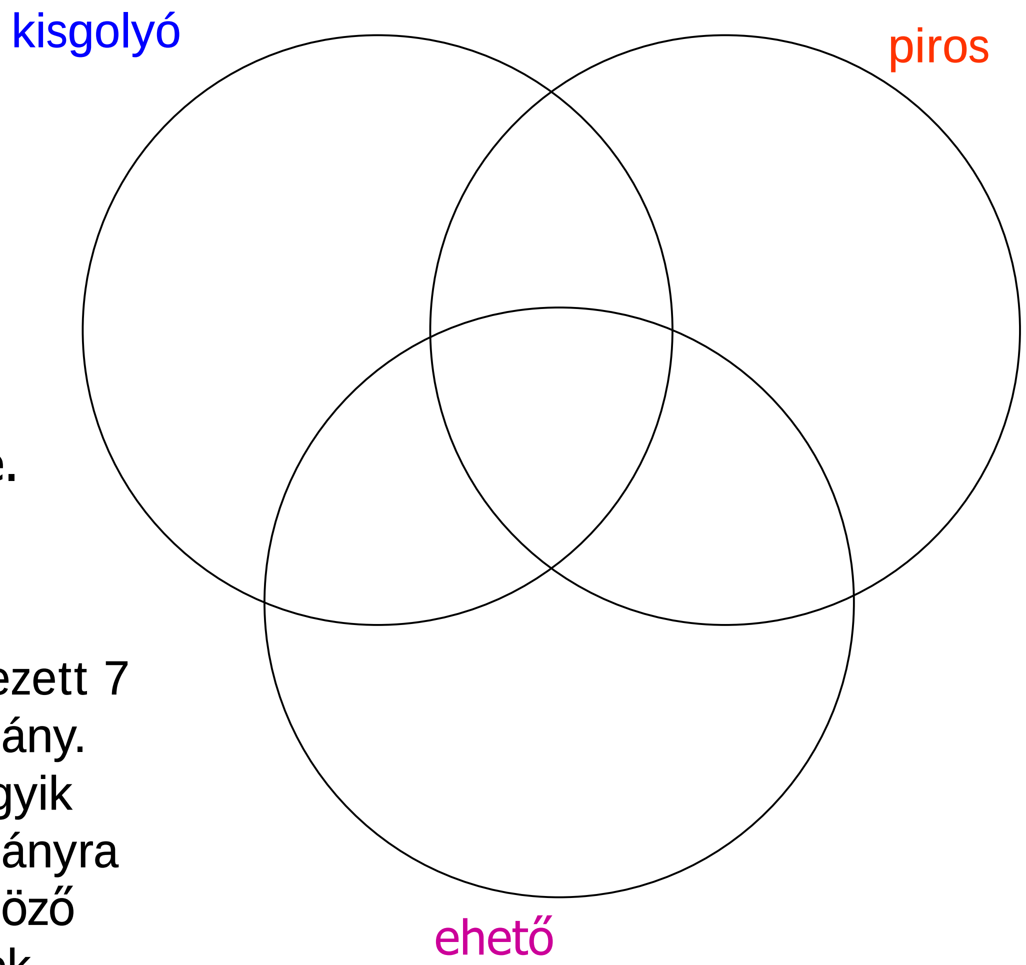
1.4 Példa halmazok szemléltetésére

Tegyük fel, hogy van egy dobozunk

- kisgolyókkal és kiskockákkal (nem-kisgolyókkal), amik lehetnek
- piros vagy sárgászöld színűek (nem-piros színűek),
- ehetőek vagy nem ehetőek.

1.4 Példa halmazok szemléltetésére

A Venn-diagramot három kör alkotja, amelyek mindegyike ‘belelóg’ a másik kettőbe.



Ugyan (háromszor) két körön is lehet ábrázolni a három állítást, de úgy nem átlátható. Márpedig a Venn-diagramot pont ez utóbbiért találták ki.

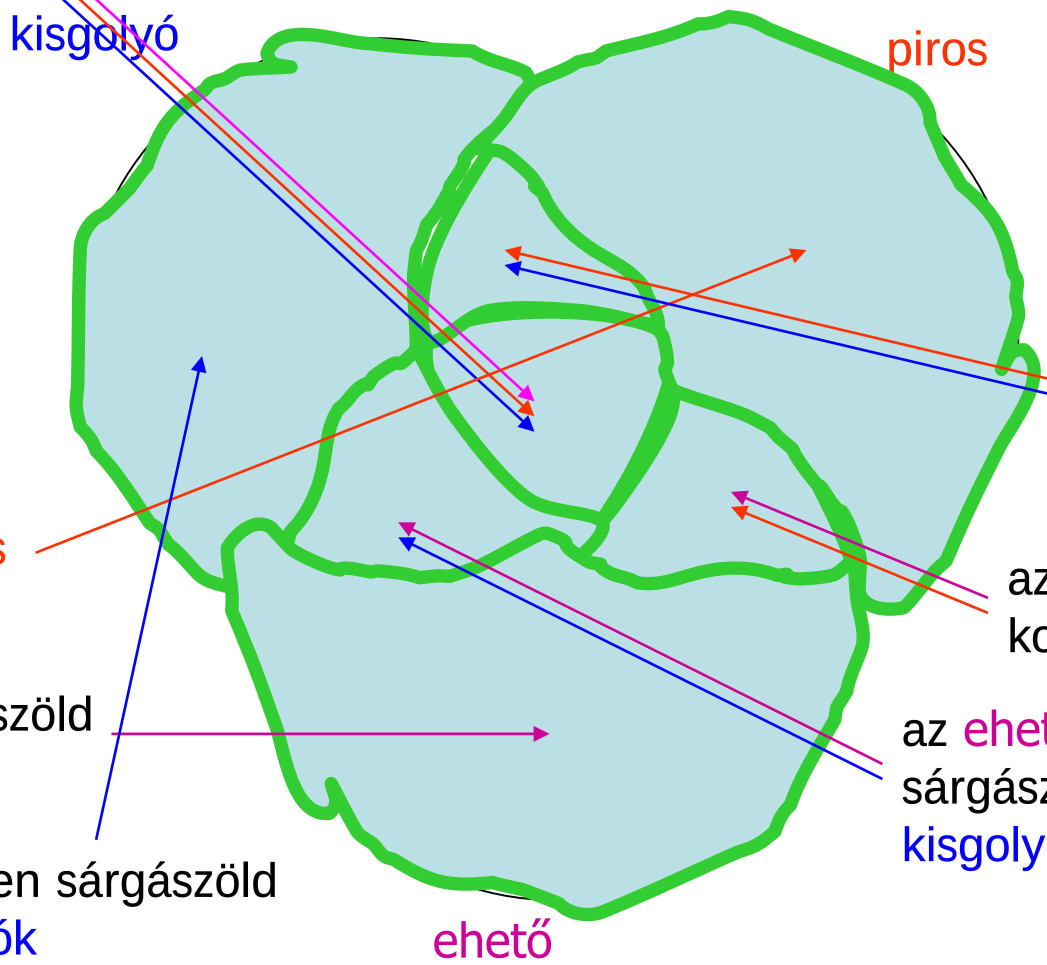
Ezáltal keletkezett 7 tartomány. Mindegyik tartományra különböző állítások igazak.

A középső tartományra mind a három állítás igaz.

Tehát ez a tartomány ad otthont az ehető piros kisgolyóknak

És maradt a három ‘nagyobb’ tartomány, amelyre csak az igaz, amelyik alkotja.

Három másik ‘kisebb’ tartomány azon köröknek a tulajdonságaival bír, amelyekben van, és az ellentétével annak, amiben nincs.



Ezek a tartományok adnak otthont

az ehetetlen piros kisgolyóknak,

az ehető piros kockáknak,

az ehető sárgászöld kisgolyóknak.

ehetetlen piros kockák

ehető sárgászöld kockák

ehetetlen sárgászöld kisgolyók

1.5 Műveletek halmazokkal: unióképzés

A H és K halmazok **egyesített halmaz**ának (**unió**jának) nevezzük azt a halmazt, amelynek elemei a H és K halmazok közül legalább az egyiknek elemei.

Jele: $H \cup K$

$$\mathbf{H \cup K = \{x \mid x \in H \text{ vagy } x \in K\}}$$

Az **unióképzés tulajdonságai** (kommutatív, asszociatív, idempotens)

1.5 Műveletek halmazokkal: metszetképzés

A H és K **halmazok közös részé**nek (**metszet**ének) nevezzük azt a halmazt, amelynek elemei a H és K halmazok mindegyikében benne vannak.

Jele: $H \cap K$

$$\mathbf{H \cap K = \{x \mid x \in H \text{ és } x \in K\}.}$$

- A **metszetképzés tulajdonságai** (kommutatív, asszociatív, idempotens)
- **Diszjunkt halmazok**

Unió- és metszetképzés tulajdonságai

$\forall\ H, K, L \subseteq U$

Abszorbciós tulajdonság:

$$\mathbf{H \cup (H \cap K) = H}$$
$$\mathbf{H \cap (H \cup K) = H}$$

Disztributivitás:

$$\mathbf{(H \cup K) \cap L = (H \cap L) \cup (K \cap L)}$$
$$\mathbf{(H \cap K) \cup L = (H \cup L) \cap (K \cup L)}$$

1.5 Műveletek halmazokkal: halmazok különbsége

A H és K **halmazok különbségé**n a H összes olyan elemének a halmazát értjük, amelyek nincsenek benne a K halmazban.

Jele: H \ K

$$\mathbf{H \setminus K = \{x \in H \mid x \notin K\}}$$

1.5 Műveletek halmazokkal: szimmetrikus különbség, komplementer

- A H és K halmazok **szimmetrikus differenciá**ja a

$$\mathbf{H \,\Delta\, K = (H \setminus K) \cup (K \setminus H)}$$

- **Komplementer halmaz:** a H halmaznak az alaphalmazra vonatkozó komplementere (kiegészítő halmaza) az U \ H halmaz.

Jele: $\mathbf{H^C}$; $H^C = \{ x \in U \mid x \notin H \}$

$$\mathbf{H \setminus K = H \cap K^C}$$

Tetszőleges H, K, L $\subseteq$ U halmazra igazak

1.) $U^C = \emptyset$; $\emptyset^C = U$

2.) $(K^C)^C = K$

3.) $K \cup K^C = U$; $K \cap K^C = \emptyset$

4.) ha $H = K$, akkor $H^C = K^C$

5.) ha $H \subseteq K$, akkor $H^C \subseteq K^C$

6.) **De Morgan azonosságok:**

$$\mathbf{(H \cap K)^C = H^C \cup K^C}$$

$$\mathbf{(H \cup K)^C = H^C \cap K^C}$$

7.) $H \setminus K = \emptyset$ akkor és csakis akkor, ha $H \subseteq K$

Példa

Az alaphalmazunk legyen a Szabolcs megyei almatermelő vállalkozók halmaza. A H halmaz tartalmazza azokat a vállalkozókat, akik golden almát termelnek, a K halmaz azokat, akik jonatán almát termelnek.

a.) Mindkettőt termelik $H \cap K$

b.) Legalább az egyiket termelik $H \cup K$

c.) Nem termelnek jonatán almát K^C

d.) Nem termelnek sem jonatán, sem golden almát

$(H \cup K)^C$

e.) Legalább az egyik almát nem termelik $(H \cap K)^C$

f.) Pontosan az egyik fajta almát termelik

$(H \cup K) \setminus (H \cap K)$

Példa

Bizonyítsuk be, hogy

- $(H \cup K) \cap L = (H \cap L) \cup (K \cap L)$
- $H \setminus K = H \setminus (H \cap K)$
- $H \setminus (K \cup L) = (H \setminus K) \cap (H \setminus L)$
- $H \setminus (K \cap L) = (H \setminus K) \cup (H \setminus L)$

Nevezetes számhalmazok

2. SZÁMHALMAZOK

2.1 Természetes számok halmaza
2.2 Egész számok halmaza
2.3 Racionális számok halmaza
2.4 Valós számok halmaza

2.1 Természetes számok halmaza

Az **N** **=** {1, 2, 3, 4, ...} halmazt a **természetes számok** halmazának nevezzük.

Ebben a halmazban **két művelet**et értelmezünk:

$\forall$ m, n $\in$ **N** esetén

(1) n + m $\in$ **N** és

(2) n x m $\in$ **N**

2.2 Egész számok halmaza

A **Z** = {...,-2,-1,0,1,2, ...} halmazt az **egész számok** halmazának nevezzük.

Ebben a halmazban **három művelet**et értelmezünk:

$\forall$ x,y $\in$ **Z** esetén

$x + y \in \mathbf{Z}$

$x - y \in \mathbf{Z}$

$x * y \in \mathbf{Z}$

2.3 Racionális számok halmaza

A **Q** = { p/q | p,q $\in$ **Z,** q $\neq$ 0} halmazt a **racionális számok** halmazának nevezzük.

Ebben a halmazban **négy művelet**et értelmezünk:

$\forall$ x,y $\in$ **Q** esetén

x + y $\in$ **Q**

x - y $\in$ **Q**

x * y $\in$ **Q**

x / y $\in$ **Q**, y $\neq$ 0

2.3 Racionális számok halmaza

A racionális szám tizedes tört alakja véges, vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört.

Tétel:

- Bármely véges, vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört felírható két egész szám hányadosaként.

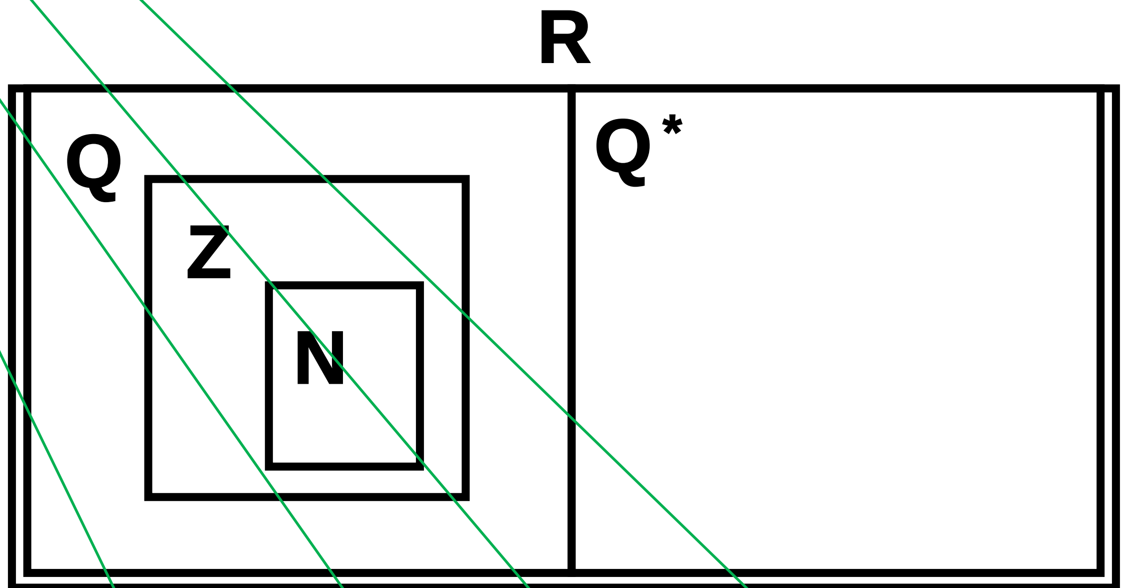
- Minden racionális szám felírható véges vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört alakban.

2.4 Valós számok halmaza

- Az olyan számokat, melynek tizedes tört kifejezése végtelen, de nem szakaszosan ismétlődő, **irracionális számok**nak mondjuk.

- A racionális és az irracionális számok halmazának unióját **valós számok** halmazának nevezzük és **R**-rel jelöljük.

TERV



$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

2.4 Valós számok halmazán értelmezett műveletek

$\forall\ x,y \in \mathbf{R}$ esetén

$$x + y \in \mathbf{R}$$

$$x - y \in \mathbf{R}$$

$$x * y \in \mathbf{R}$$

$$x / y \in \mathbf{R},\ y \neq 0$$

2.4 Valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás tulajdonságai

$\forall$ x,y,z $\in$ **R** esetén

1.) **Kommutatív**: $x + y = y + x$

2.) **Asszociatív**: $x + (y + z) = (x + y) + z$

$x * (y * z) = (x * y) * z$

3.) **Disztributív**: $(x + y) * z = x * z + y * z$

4.) $\exists$ a **nulla elem**: $x + 0 = x$

5.) $\exists$ az **egység elem**: $x * 1 = x$

6.) $\exists$ a **negatív elem**: $x + (-x) = 0$

7.) $\exists$ a **reciprok elem** (x^{-1}); $x \neq 0$: $x * x^{-1} = 1$

2.4 Valós számok halmaza - definíciók

- A $H \subset \mathbf{R}$ **halmaz felülről korlátos,** ha $\exists\ l \in \mathbf{R}$ úgy, hogy az l elem minden H-beli halmaznál nagyobb, vagy egyenlő.

- A $H \subset \mathbf{R}$ **halmaz alulról korlátos,** ha $\exists\ l \in \mathbf{R}$ úgy, hogy az l elem minden H-beli halmaznál kisebb, vagy egyenlő.

- Ha egy halmaz alulról és felülről is **korlátos**, akkor korlátosnak nevezzük.

2.4 Valós számok halmaza - definíciók

- A $H \subset \mathbf{R}$ halmaz felülről korlátos, akkor H felső korlátainak legkisebbikét **pontos felső korlát**nak (supremum) nevezzük: **sup H**

- A $H \subset \mathbf{R}$ halmaz alulról korlátos, akkor a H alsó korlátainak legnagyobbikát **pontos alsó korlát**nak (infimum) nevezzük: **inf H**.

2.4 Valós számok halmaza - definíciók

- Ha a H felülről korlátos halmaznak van H-beli felső korlátja, akkor ezt a H **maximum**ának mondjuk: **max H.**

- Ha a H alulról korlátos halmaznak van H-beli alsó korlátja, akkor ezt a H **minimum**ának mondjuk: **min H**.

2.4 Valós számok halmaza – számegyenes, intervallum

- A valós számok és a számegyenes pontjai kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak, így a valós számokat **számegyenes**en szemléltethetjük.

- A számegyenesen két adott szám közé eső számok összességét **intervallum**nak nevezzük.

2.4 Valós számok halmaza – intervallum

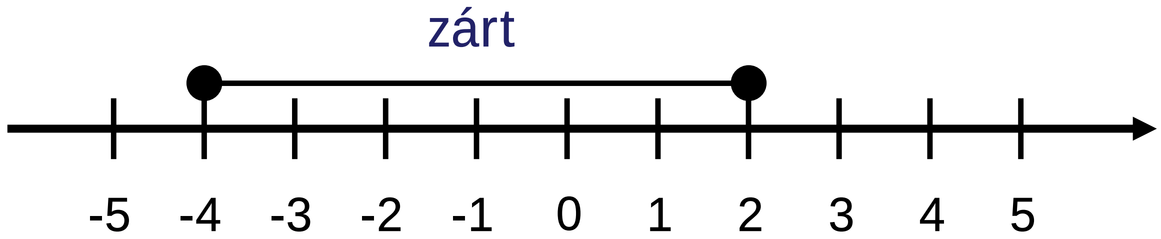
- Az $I \subseteq \mathbf{R}$ halmazt **intervallum**nak nevezzük, ha $\forall$ x, y $\in$ **I** és $x \le z \le y$ esetén $z \subseteq$ **I,** azaz bármely két elemével együtt a köztük lévő elemeket is tartalmazza.

Jelölések:

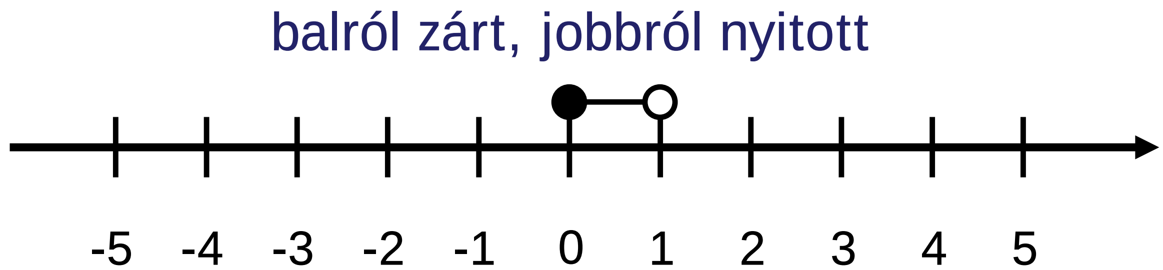
zárt	$[a,b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b \}$
balról zárt	$[a,b[= \{ x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b \}$
jobbról zárt	$]a,b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b \}$
nyílt	$]a,b[= \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \}$

2.4 Valós számok halmaza – intervallum megadása

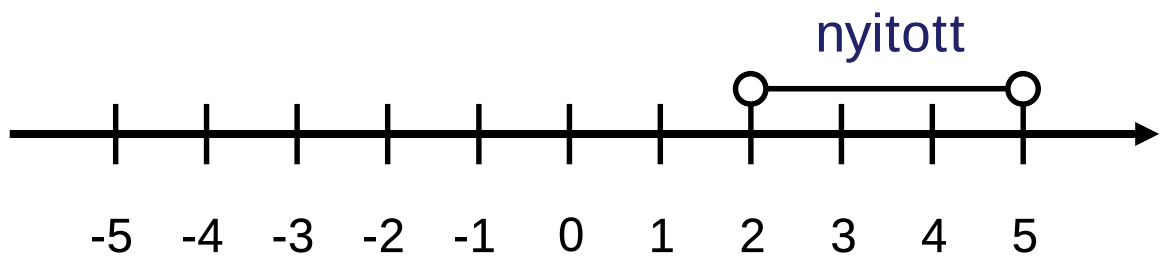
A = [-4, 2]



B = [0, 1[



C =]2, 5[



2.4 Valós számok kibővített számhalmaza

Az $\mathbf{R_b}$:= R $\cup$ {- ∞, + ∞} halmazt a **valós számok kibővített halmazá**nak nevezzük.

Ebben a halmazban - ∞ $<$ + ∞ és minden x $\in$ R-re teljesül, hogy - ∞ $<$ x $<$ + ∞.

A ∞ szimbólum nem számot jelöl, így esetében az algebrai szabályokat nem alkalmazhatjuk.

2.4 Műveletek $\pm\infty$ - nel

Legyen $x \in \mathbf{R}$. Ekkor

1.) $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$

$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$

$x / (+\infty) = x / (-\infty) = 0$

2.) ha $x > 0$, akkor

$x * (+\infty) = +\infty * x = +\infty$

$x * (-\infty) = -\infty * x = -\infty$

3.) ha $x < 0$, akkor

$x * (+\infty) = +\infty * x = -\infty$

$x * (-\infty) = -\infty * x = +\infty$

2.4 Műveletek $\pm\infty$ - nel

Legyen $x \in \mathbf{R}$. Ekkor

4.) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(+\infty) * (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $(-\infty) * (-\infty) = +\infty$

$-(+\infty) = -\infty$; $(+\infty) * (-\infty) = -\infty$

$-(-\infty) = +\infty$; $(-\infty) * (+\infty) = -\infty$

2.4 Amilyen műveletet nem végzünk $\pm\infty$-nel

1.) $(+\infty) + (-\infty)$
2.) $(-\infty) + (+\infty)$
3.) $0 * (+\infty)$
4.) $0 * (-\infty)$
5.) $(+\infty) / (+\infty)$
6.) $(+\infty) / (-\infty)$
7.) $(-\infty) / (+\infty)$
8.) $(-\infty) / (-\infty)$

Köszönöm a figyelmet!