Többváltozós függvények (feltétel nélküli) szélsőérték-számítása

Dr. Vincze Szilvia

15. Többváltozós függvények szélsőérték-számítása

15.1 Kétváltozós függvények feltétel nélküli szélsőérték-számítása
15.2 Háromváltozós függvények feltétel nélküli szélsőérték-számítása

15.1 Kétváltozós függvény feltétel nélküli szélsőérték-számítása

Szükséges feltétel: Ha az f: D ($\subseteq \mathbf{R}^2$) $\rightarrow$ R 2-változós függvénynek az (a,b) $\in$ D pontjában lokális szélsőértékhelye van és itt léteznek az elsőrendű parciális deriváltak, akkor ezek mindegyike nulla, azaz

$$f'_x(a,b) = 0; \quad f'_y(a,b) = 0$$

$\Downarrow$

A tétel alapján tehát a többváltozós függvények lehetséges szélsőértékeinek a meghatározása úgy történhet, hogy a parciális deriváltakat egyenlővé tesszük nullával, majd a kapott egyenletrendszert megoldjuk. Így a szélsőérték(ek) a megoldások között lesz(nek). A valódi szélsőértékhelyek megkeresésében az alábbi tétel áll rendelkezésünkre.

15.1 Kétváltozós függvény feltétel nélküli szélsőérték-számítása

Elégséges feltétel: Ha $f'_x(a,b) = 0$ és $f'_y(a,b) = 0$ és az (a,b) pontban léteznek a másodrendű parciális deriváltak és $D(x,y) = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - f''_{xy}(x,y) \cdot f''_{yx(x,y)}$

kifejezés értéke (a,b)-ben:

- **pozitív**, akkor f-nek (a,b)-ben helyi szélsőértékhelye van ($f''_{xx}(x,y) > 0$ esetén minimum; $f''_{xx}(x,y) < 0$ esetén maximum);
- **negatív**, akkor f-nek (a,b)-ben nincs helyi szélsőértékhelye;
- **nulla**, akkor még további vizsgálat szükséges.

Példa

Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékét!

$$f(x,y)=x^3-3xy+y^3\,;\quad (x,y)\in R^2$$

15.2 n-változós függvény feltétel nélküli szélsőérték-számítása

Szükséges feltétel: Ha az f: D ($\subseteq$ **R**^{n}) $\to$ R n-változós függvénynek az a $\in$ D pontjában lokális szélsőértékhelye van és itt léteznek az elsőrendű parciális deriváltak, akkor ezek mindegyike nulla, azaz

$$f'_{x_j}(a) = 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n)$$

A tétel alapján tehát a többváltozós függvények lehetséges szélsőértékeinek a meghatározása úgy történhet, hogy a parciális deriváltakat egyenlővé tesszük nullával, majd a kapott egyenletrendszert megoldjuk. Így a szélsőérték(ek) a megoldások között lesz(nek). A valódi szélsőértékhelyek megkeresésében az alábbi tétel áll rendelkezésünkre.

15.2 n-változós függvény feltétel nélküli szélsőérték-számítása

Elégséges feltétel: Legyen f : D ($\in$ R^n) $\rightarrow$ R. Tegyük fel, hogy az f függvény az a$\in$D belső pont valamely környezetében kétszer folytonosan differenciálható. Ha az *f* parciális deriváltjai az a-ban nullák, azaz:

$$f'_{x_j}(a) = 0 \; (j = 1,2,\ldots,n)$$

15.2 n-változós függvény feltétel nélküli szélsőérték-számítása

és a másodrendű parciális deriváltakból képzett

$$D = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ & & & . \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

determinánsból előállított

15.2 n-változós függvény feltétel nélküli szélsőérték-számítása

$$D_1 = \left| f''_{x_1 x_1} \right|$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} \end{vmatrix}$$

$$\ldots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} & \cdots & f''_{x_1 x_n} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} & \cdots & f''_{x_2 x_n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ & & & . \\ f''_{x_n x_1} & f''_{x_n x_2} & \cdots & f''_{x_n x_n} \end{vmatrix}$$

sarokdeterminánsok előjele a vizsgált pontban

15.2 n-változós függvény feltétel nélküli szélsőérték-számítása

1) $D_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, akkor a-ban minimuma van,
2) $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, … azaz az adott sorrendben váltakozó előjelűek, akkor a-ban maximuma van,
3) egyéb esetekben további vizsgálatokra van szükség.

A szélsőértéket az $f(a)$ adja.

Példa

Határozza meg az alábbi háromváltozós függvény lokális szélsőértékét!

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$

Példa

36 m hosszú rézcsőből maximális térfogatú téglatest vázat kívánunk készíteni (a téglatest élei lesznek a csövek). Mekkorák legyenek a téglatest élei?

Példa

Egy adott talajtípuson az átlagosnak megfelelő időjárási viszonyok között a búza hozamát hektáronként a felhasznált nitrogén és foszfor hatóanyag erősen befolyásolja. A hektáronként kijuttatott hatóanyag (N) és foszfor (P) mennyiségét 50 kg/ha-ban mérjük. Az elérhető hozamot (H) t/ha-ban adjuk meg. A hozam és a műtrágyák közötti függvénykapcsolat:

$$f(N,P) = 1{,}885 + 0{,}75N + 0{,}247P - 0{,}066N^2 - 0{,}04P^2 + 0{,}021NP$$

Milyen nitrogén és foszfor mennyiség esetén lesz maximális a hozam?

Köszönöm a figyelmet!