Egyváltozós valós függvények és tulajdonságaik
Elemi függvények
Függvény-transzformáció

Dr. Vincze Szilvia

4. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK ÉS TULADONSÁGAIK

4.1 Az egyváltozós valós függvény fogalma, szemléltetése, megadása, műveletek függvényekkel
4.2 Zérushely, polinomok zérushelye
4.3 Korlátosság
4.4 Monotonitás
4.5 Környezet fogalma
4.6 Szélsőérték
4.7 Konvex és konkáv függvények
4.8 Inflexiós pont
4.9 Páros és páratlan függvények
4.10 Periodikus függvények

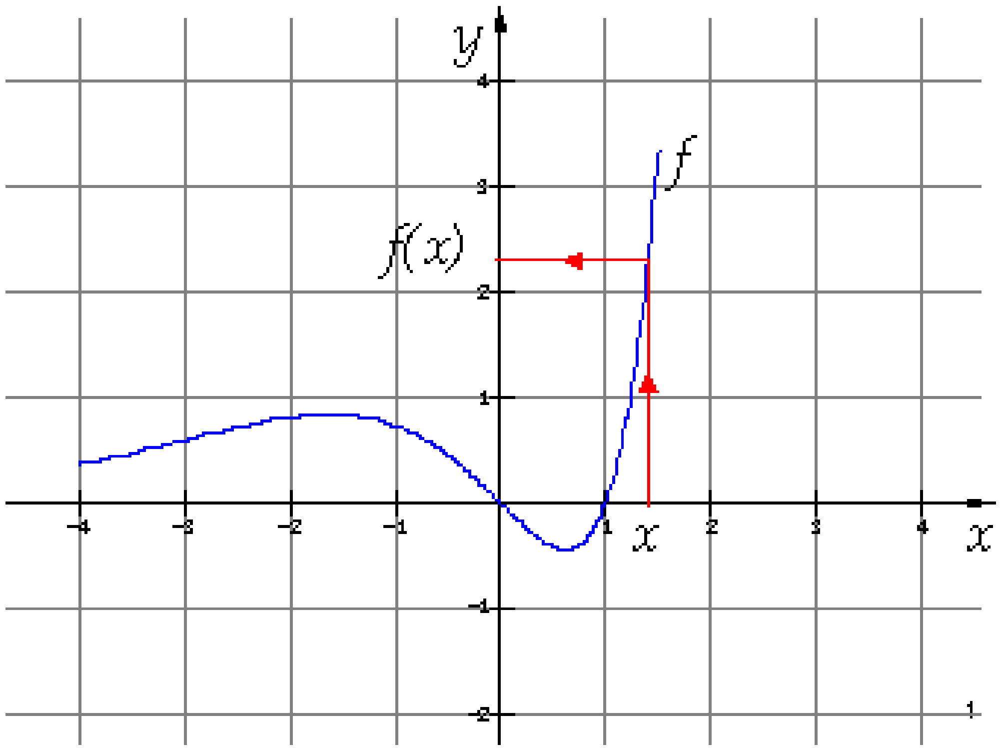
4.1 Egyváltozós valós függvény fogalma

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$. Az $\boldsymbol{f} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt **egyváltozós valós függvény**nek nevezzük.

Megjegyzés: Az olyan hozzárendelést, ahol egy nem üres halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük egy szintén nem üres halmaz egy, de csakis egy elemét **függvény**nek nevezzük.

4.1 Egyváltozós valós függvény szemléltetése

Az egyváltozós valós függvények **szemléltetés**ére a **Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer**t használjuk, melyben az (x, *f* (x)) számpárt ábrázolva kapjuk meg az *f* függvény grafikonját.



4.1 Egyváltozós valós függvény megadása

Egy **függvény**t akkor tekintünk **adott**nak, ha ismerjük az

- értelmezési tartományát
- egy képhalmazát (lehetőleg az értékkészletét)
- azt az utasítást, amely megmondja, hogy az értelmezési tartomány elemeihez milyen módon rendeljük hozzá az értékkészlet elemeit.

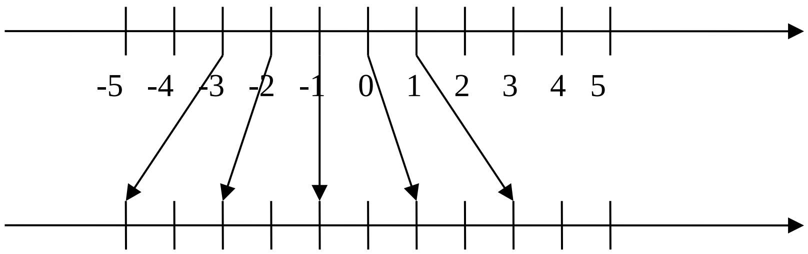
4.1 Egyváltozós valós függvény megadása

A függvény megadása leggyakrabban történhet:

a) értéktáblázattal:

x	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9	25

b) nyíldiagrammal:



4.1 Egyváltozós valós függvény megadása

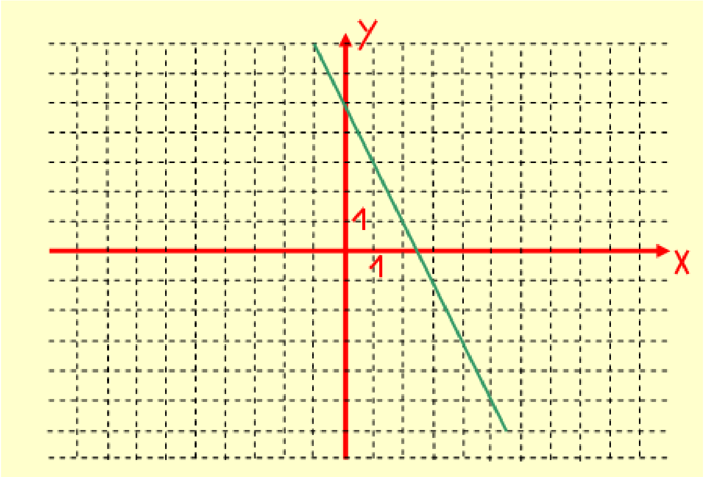
c) **képlettel:**

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 2x + 1$

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) \mapsto 2x + 1$

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = 2x + 1$

d) **grafikonnal**



e) **utasítással, körülírással**

f) **különböző formulákkal**

4.1 Műveletek egyváltozós valós függvényekkel

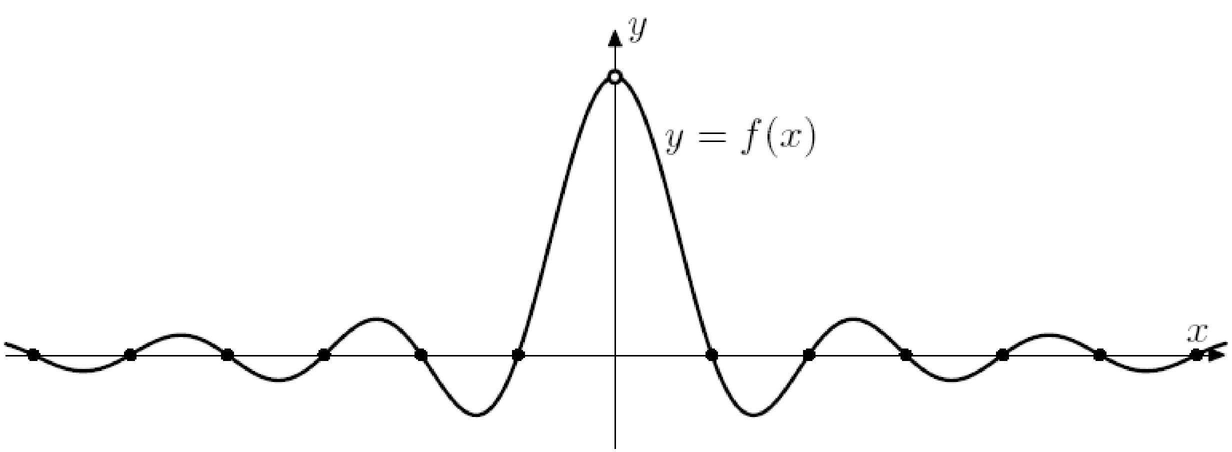
Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f, g : D \to \mathbf{R}$ adott függvények és $c \in \mathbf{R}$. Ekkor a $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ és f / g függvényeket az f c-szeresének, f és g összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának nevezzük és a következőképpen értelmezzük:

- $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$, $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$

4.2 Egyváltozós valós függvények zérushelye

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$ és az $f : D \to \mathbf{R}$ adott függvény. Az $x_0 \in D$ pontot az f **függvény zérushelyé**nek nevezzük, ha $f(x_0) = 0$.

Megjegyzés: A függvény zérushelyét a függvény grafikonja és az x tengely metszéspontja adja.



4.2 Polinom fogalma

Az

$$\boldsymbol{f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0}$$

alakú függvényt n-ed fokú racionális egész függvénynek vagy n-ed fokú polinom-függvénynek vagy egyszerűen csak **n-ed fokú polinom**nak nevezzük, ahol az a_i (i=1,2,... ,n) együtthatók valós számok és $a_n \neq 0$.

4.2 Polinom zérushelye

Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

polinomnak (a_0, a_1, ... , a_n adott valós számok és $a_n \neq 0$) legfeljebb n számú zérushelye lehet.

4.2 Példa - polinom zérushelyeinek meghatározása

Határozza meg a következő függvények zérushelyeit.

1.) $f(x) = x^2 + 3x - 4$

2.) $g(x) = x^3 - 3x + 2$

4.2 Zérushely meghatározásának módszerei

4.2.1 Horner-elrendezés

4.2.2 Felező módszer

4.2.3 Polinom osztása polinommal

4.2.1 Horner-elrendezés

A p polinom adott **$x = x_0$ helyen vett helyettesítési érték**ének **meghatározásá**ra használhatjuk.

polinom együtthatói csökkenő hatványok szerinti sorrendben

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
x_0	a_n	$a_nx_0+a_{n-1}$	$(a_nx_0+a_{n-1})x_0+a_{n-2}$		$p(x_0)$

HORNER-FÉLE TÁBLÁZAT

4.2.1 Horner-elrendezés

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
x_0	$\boxed{a_n}$	$a_n x_0 + a_{n-1}$	$\boxed{(a_n x_0 + a_{n-1}) x_0 + a_{n-2}}$		$\boxed{p(x_0)}$

a bal oldali szomszédos elem x_0-szorosához hozzáadjuk az éppen kérdéses rovat fölötti együtthatót

ha a $p(x_0) = 0$, akkor x_0 zérushelye p-nek

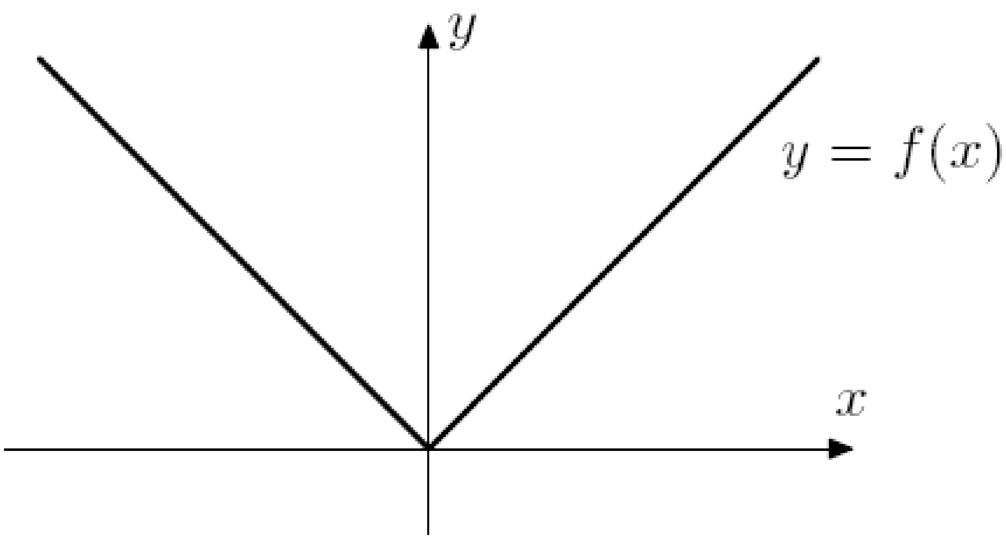
4.2.1 Példa - Horner-elrendezés

Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 3x + 2$ függvény zérushelyeit.

4.3 Korlátosság – alulról korlátos függvény

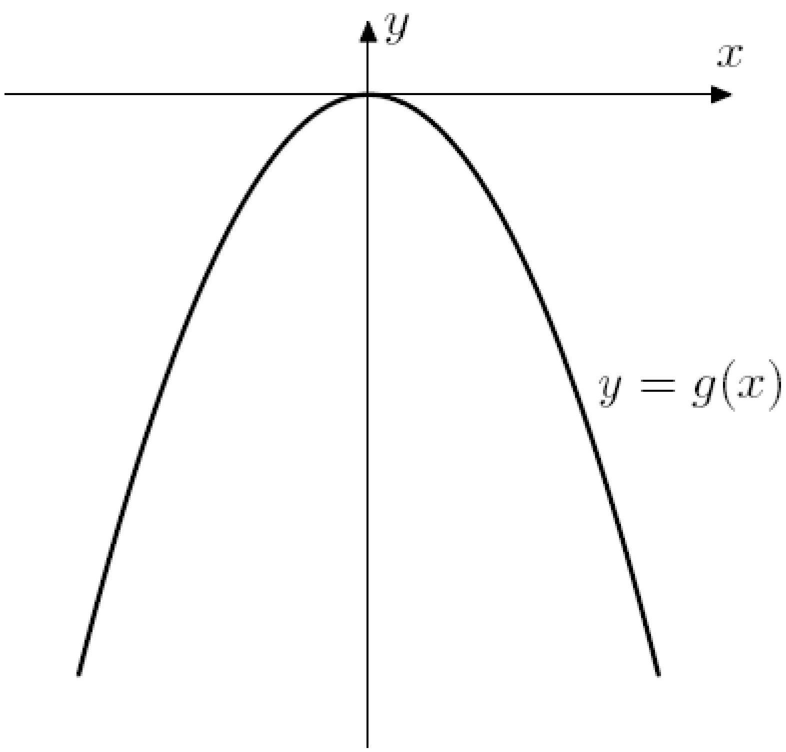
Legyen D $\subseteq$ **R**, és f, g : D $\rightarrow$ **R** adott függvények.

1.) Az f függvényt **alulról korlátos**nak nevezzük, ha értékkészlete alulról korlátos halmaz, azaz ha $\exists$ k $\in$ **R** úgy, hogy k $\leq$ f(x), minden x $\in$ D esetén.



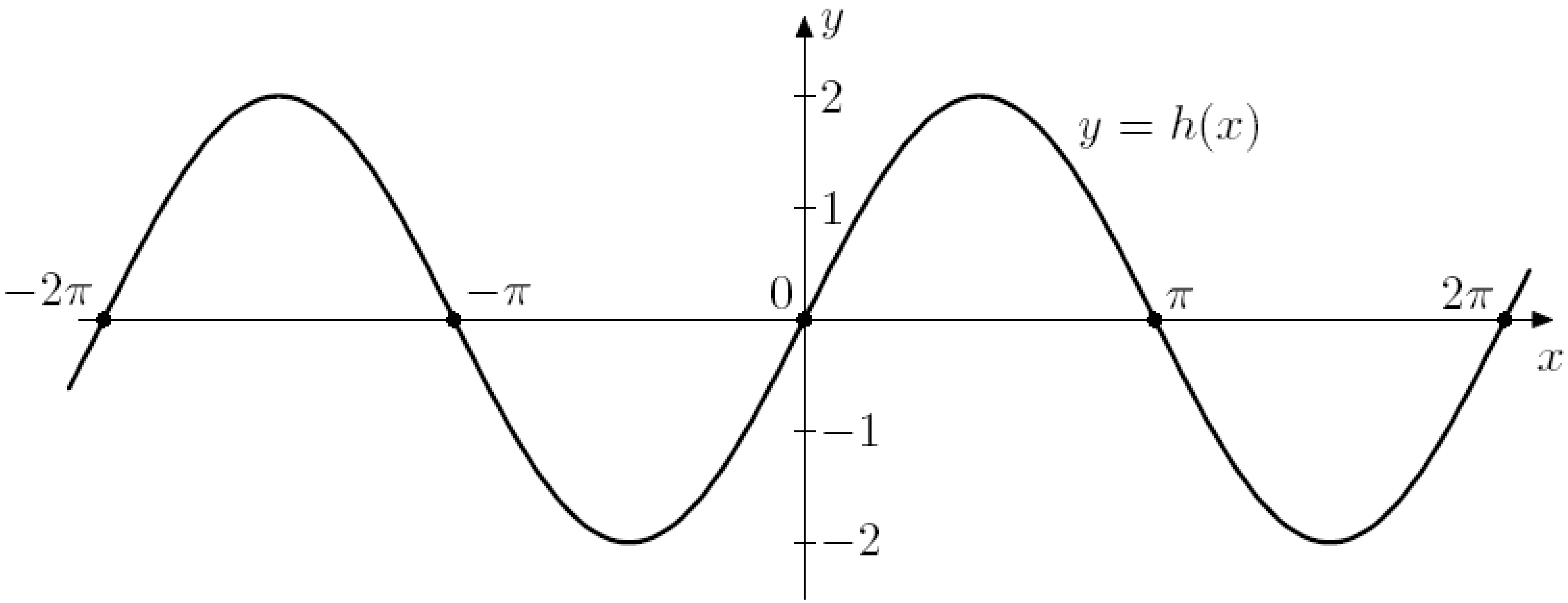
4.3 Korlátosság – felülről korlátos függvény

2.) A *g* függvényt **felülről korlátos**nak nevezzük, ha értékkészlete felülről korlátos halmaz, azaz ha $\exists\ K \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $g(x) \leq K$, minden $x \in D$ esetén.



4.3 Korlátosság – korlátos függvény

3.) Ha a *h* függvény alulról és felülről is korlátos, akkor **korlátos függvény**nek nevezzük.

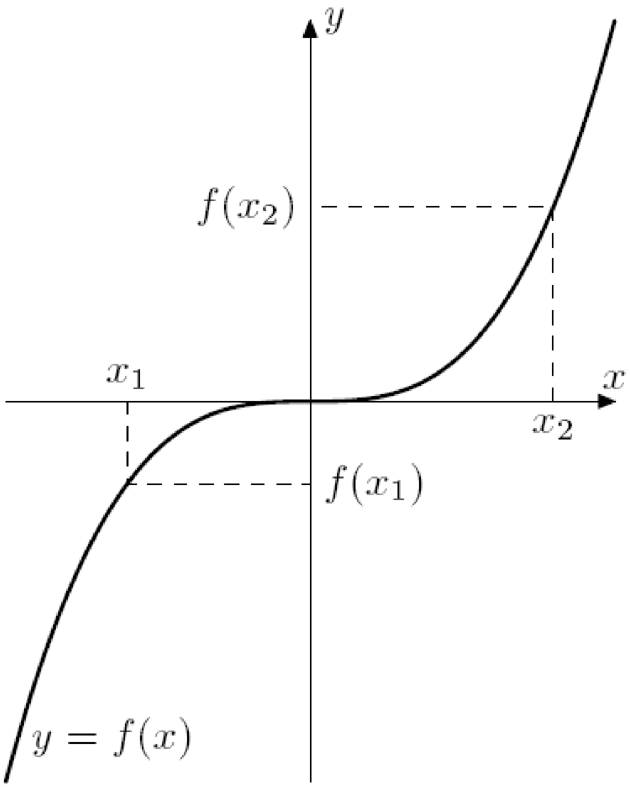


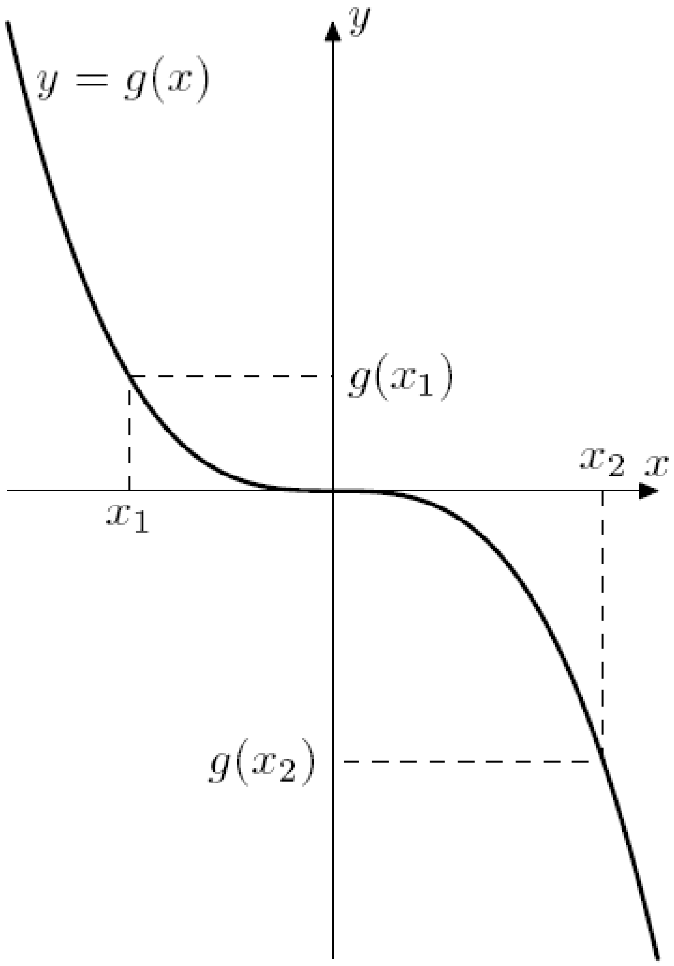
4.4 Monotonitás

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, és $f : D \to \mathbf{R}$ adott függvény.

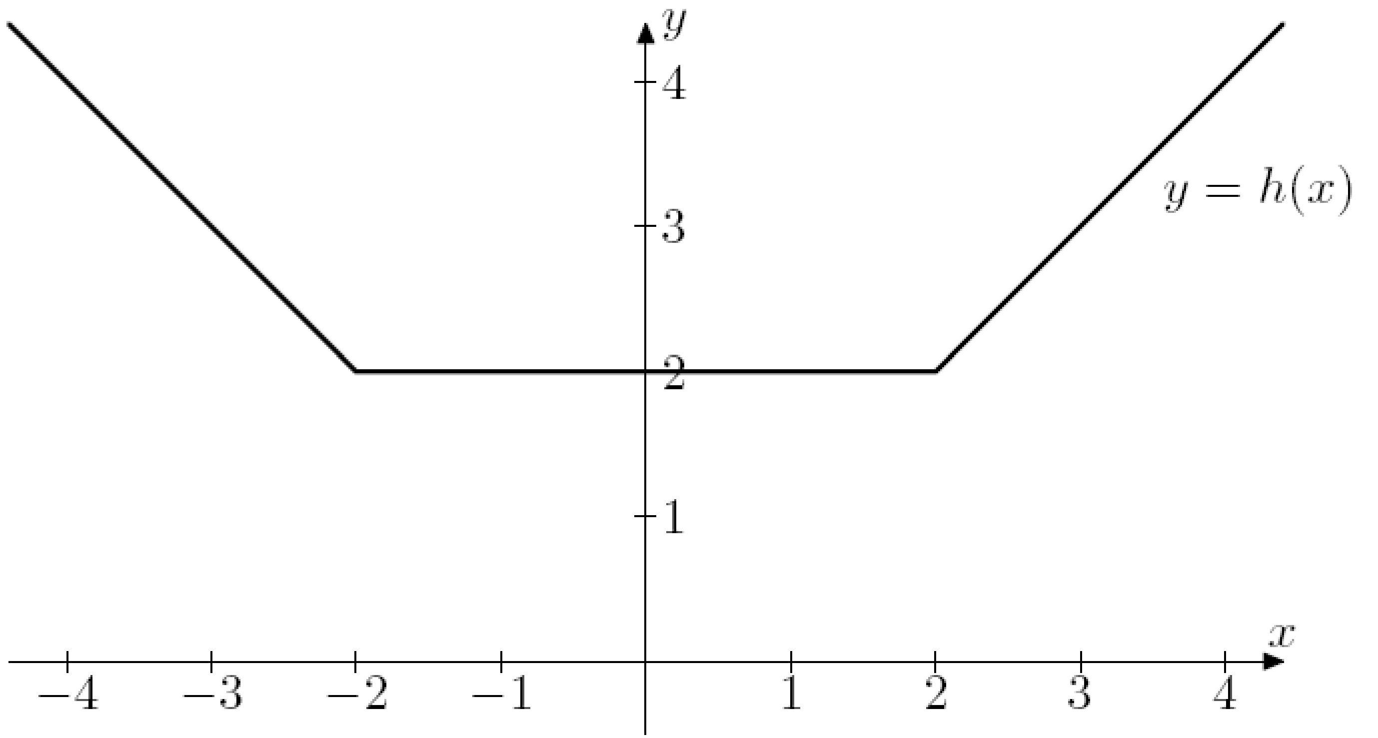
- Az f függvény **monoton növekvő**, ha $\forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ esetén: $f(x_1) \leq f(x_2)$
- Az f függvény **szigorúan monoton növekvő**, ha $\forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ esetén: $f(x_1) < f(x_2)$
- Az f függvény **monoton csökkenő**, ha $\forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ esetén: $f(x_1) \geq f(x_2)$
- Az f függvény **szigorúan monoton csökkenő**, ha $\forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ esetén: $f(x_1) > f(x_2)$

4.4 Szigorúan monoton növekvő és csökkenő függvények





4.4 Monoton függvény



4.5 Környezet fogalma

Az $x_0 \in \mathbf{R}$ pont egy $\delta > 0$ sugarú **környezet**én az $]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[$ nyílt intervallumot értjük.

Minden $x_0 \in \mathbf{R}$ esetén azon $x \in \mathbf{R}$ számok halmazát, melyekre $x > x_0$, a $+\infty$ **egy környezeté**nek nevezzük és $]\ x_0,\ +\infty[$ -nel jelöljük.

Megjegyzés: Hasonlóan értelmezzük a $-\infty$ környezetét is, amit $]\ -\infty,\ x_0[$ -al jelölünk.

4.6 Szélsőérték fogalma

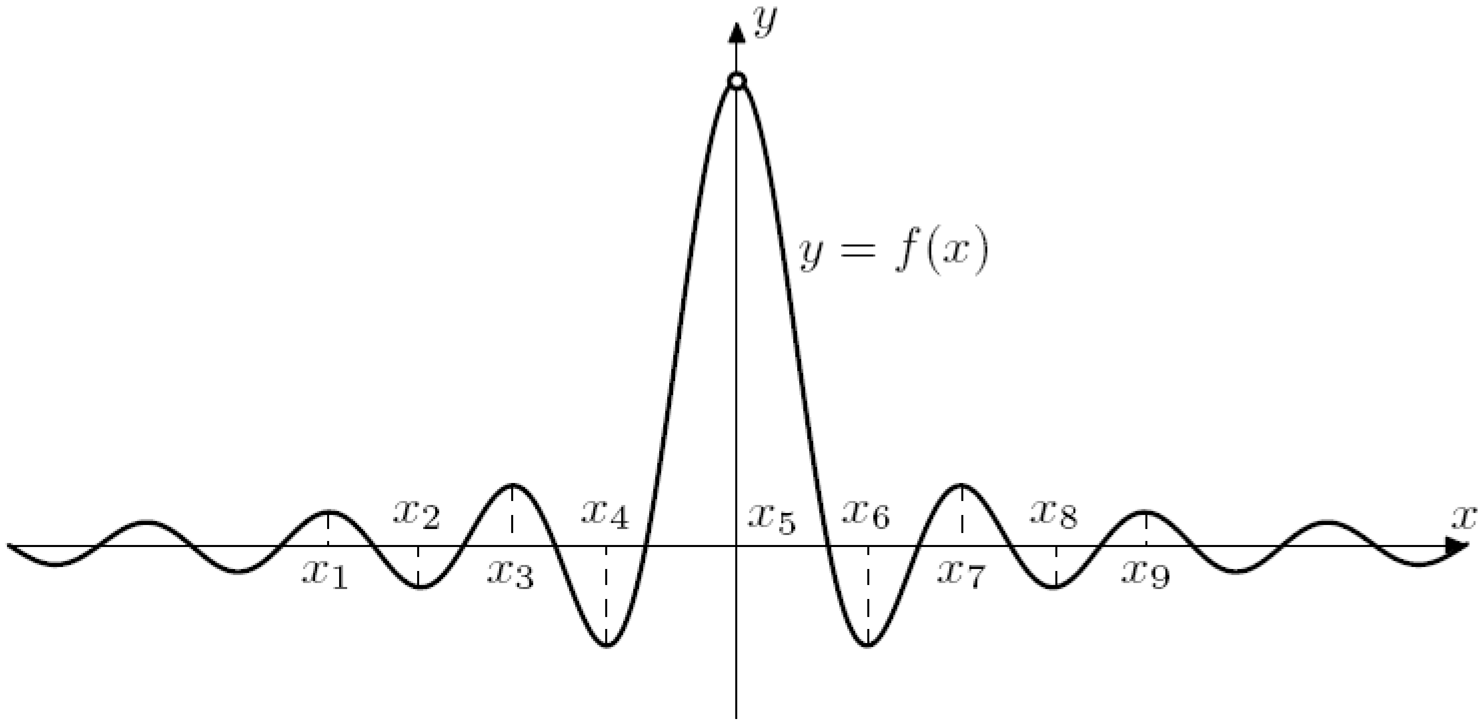
Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, és $f : D \to \mathbf{R}$ adott függvény és $x_0 \in D$. Az f függvénynek az x_0 pontban

- **abszolút (globális) minimuma** van, ha $f(x_0) \leq f(x)$ minden $x \in D$ esetében;
- **abszolút (globális) maximuma** van, ha $f(x_0) \geq f(x)$ minden $x \in D$ esetében;
- **abszolút (globális) szélsőértéke** van, ha ott abszolút minimuma vagy abszolút maximuma van.

4.6 Szélsőérték fogalma

- **helyi (lokális) minimuma** van, ha $\exists$ olyan $\delta>0$, amelyre fennáll, hogy $f(x_0) \leq f(x)$ minden $x \in]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\ \cap D$ esetén,
- **helyi (lokális) maximuma** van, ha $\exists$ olyan $\delta>0$, amelyre fennáll, hogy $f(x_0) \geq f(x)$ minden $x \in]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\ \cap D$ esetén,
- **helyi (lokális) szélsőértéke** van, ha ott helyi minimuma vagy helyi maximuma van.

4.6 Szélsőérték fogalma



4.7 Függvények alaki tulajdonságai

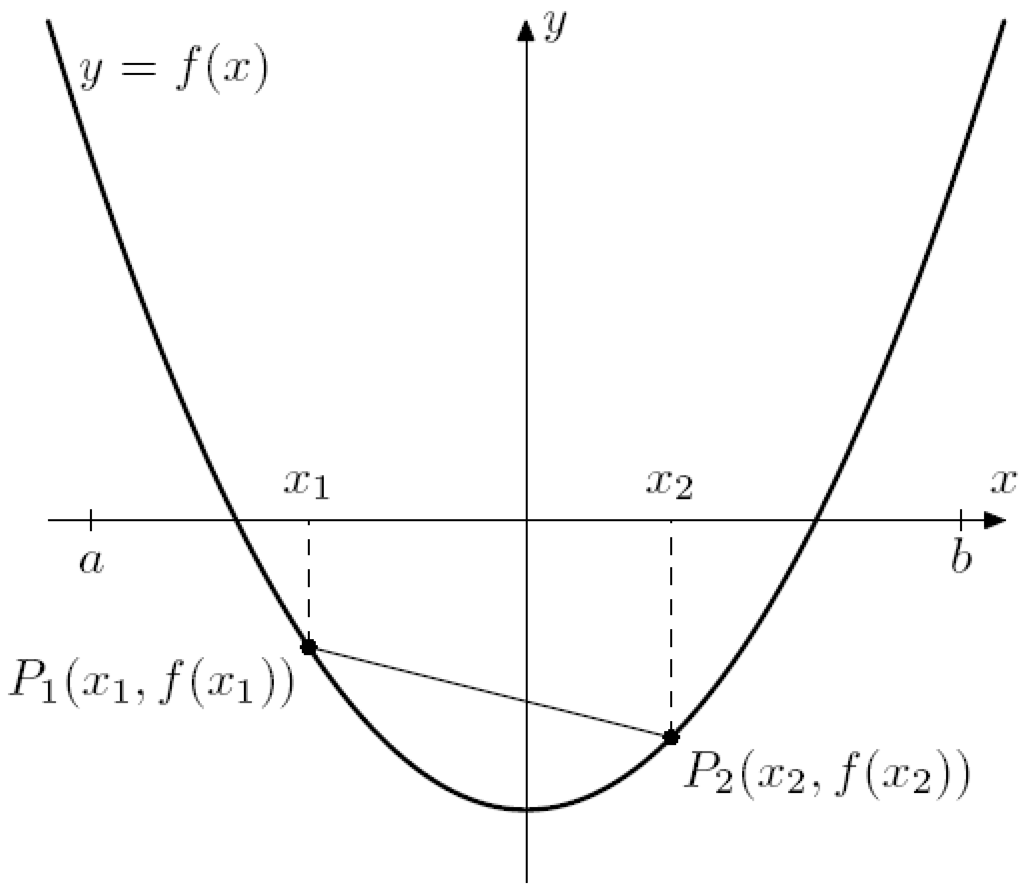
Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, és $f: D \to \mathbf{R}$ adott függvény és $a, b \in D$ és $a < b$.

Azt mondjuk, hogy az f **függvény konvex** az $[a,b]$-n, ha minden $x_1, x_2 \in [a,b]$ éminden $\lambda \in [0,1]$ esetén:

$$f(\lambda \cdot X_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \leq \lambda \cdot f(X_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2),$$

azaz ha minden $x_1, x_2 \in [a,b]$ esetén a $P(x_1, f(x_1))$ és $P(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő húr a függvénygörbe fölött halad.

4.7 Példa konvex függvényre



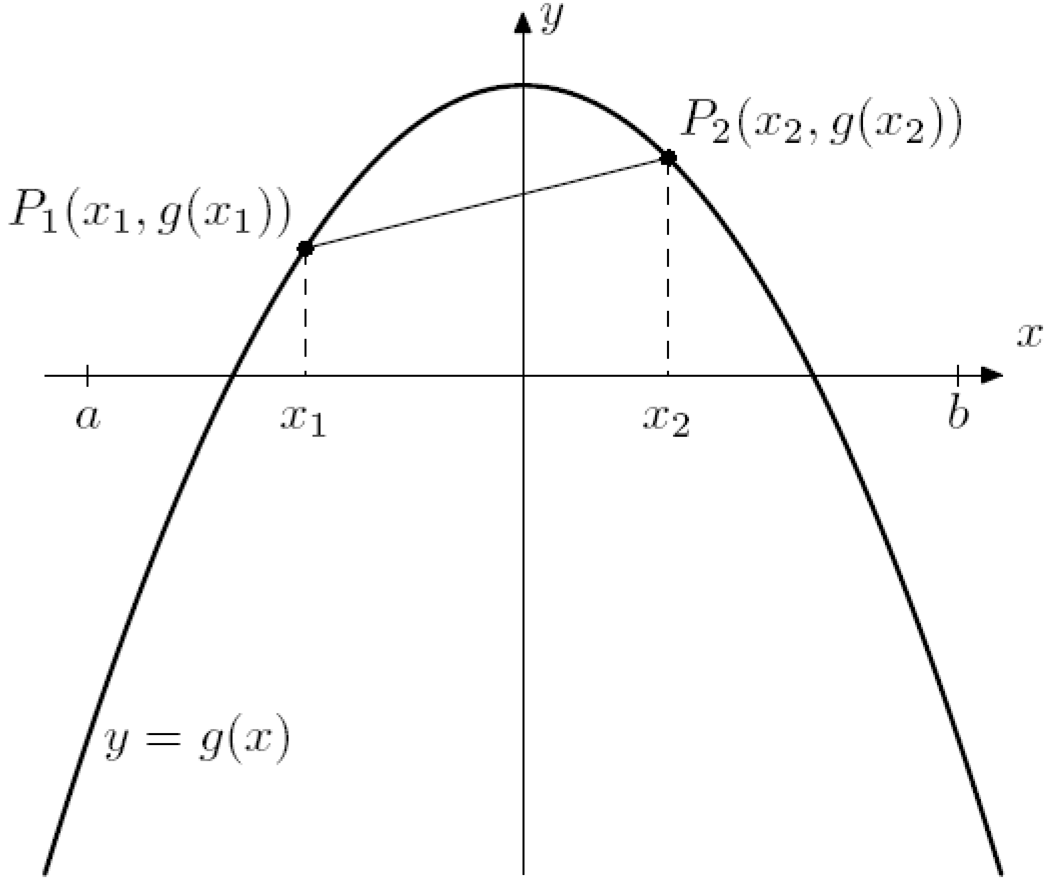
4.7 Függvények alaki tulajdonságai

Azt mondjuk, hogy az f **függvény konkáv** az [a,b]-n, ha minden x_1, $x_2 \in [a,b]$ és minden $\lambda \in [0,1]$ esetén:

$$f(\lambda \cdot X_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \geq \lambda \cdot f(X_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$$

azaz ha minden x_1, $x_2 \in [a,b]$ esetén a $P(x_1, f(x_1))$ és $P(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő húr a függvénygörbe alatt halad.

4.7 Példa konkáv függvényre



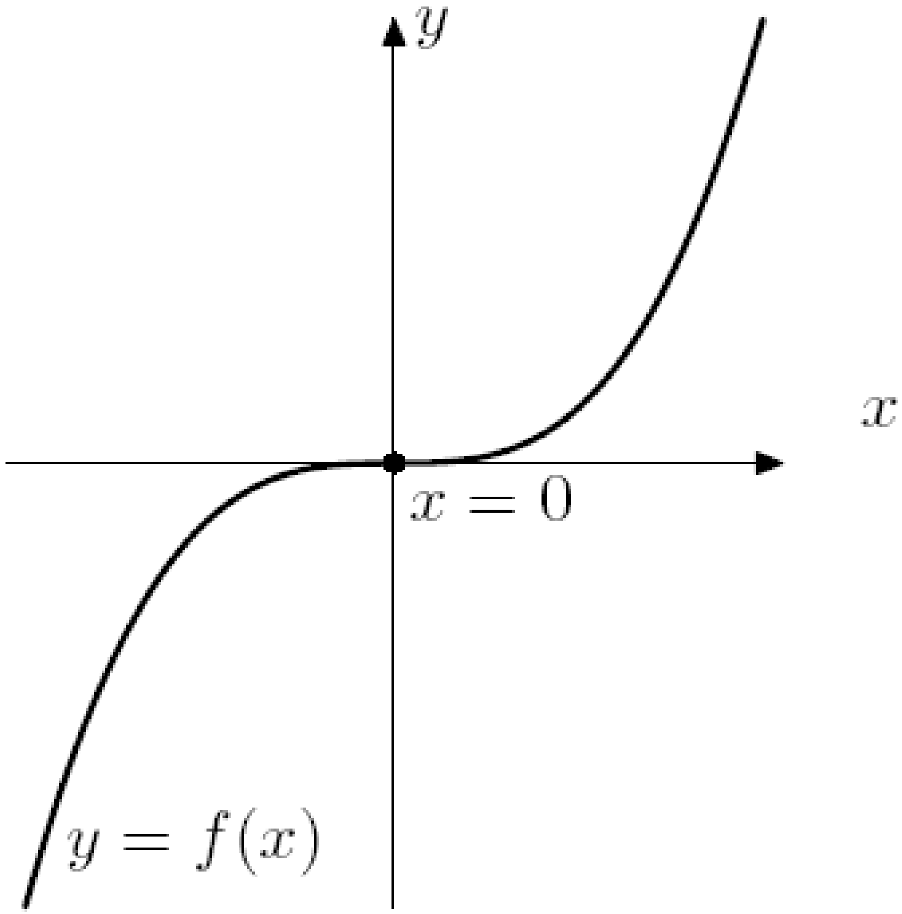
4.8 Inflexiós pont

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, és $f : D \to \mathbf{R}$ adott függvény $x_0 \in D$.

Az x_0 az f függvény **inflexiós pont**ja, ha létezik $\delta>0$ úgy, hogy $]x_0-\delta, x_0[$ intervallumon az f függvény konvex, az $]x_0, x_0+\delta[$ intervallumon pedig konkáv (vagy pedig fordítva).

Megjegyzés: Az inflexiós pont olyan pont, ahol a függvény konvexitása megváltozik.

4.8 Példa inflexiós pontra



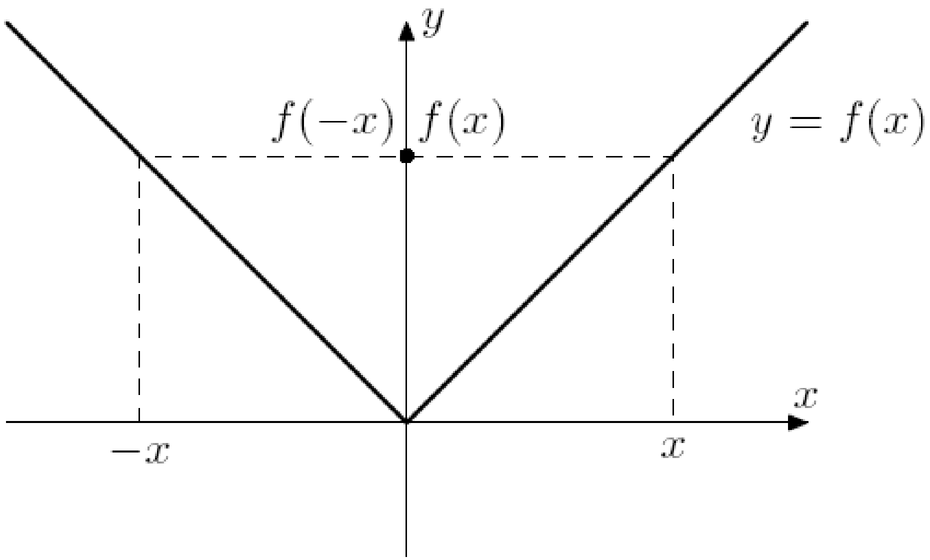
4.9 Páros és páratlan függvények

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, és $f : D \to \mathbf{R}$ adott függvény.

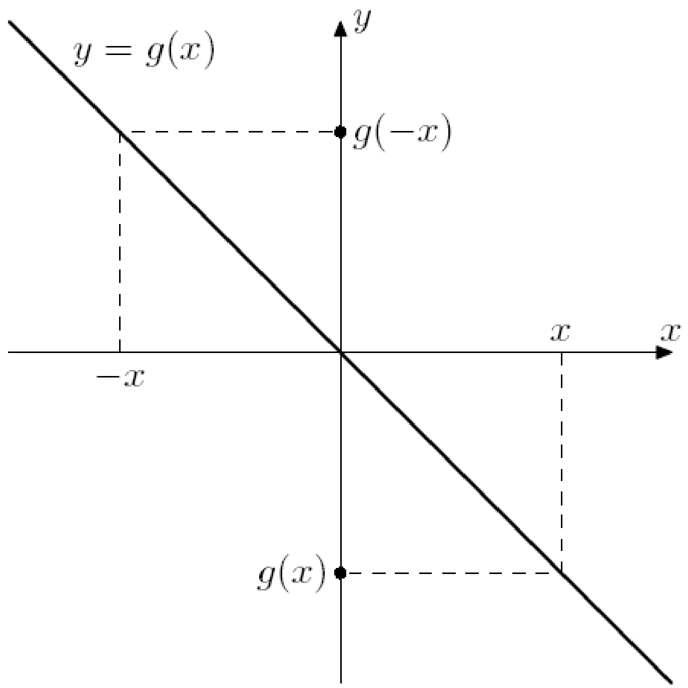
- Azt mondjuk, hogy az f **függvény páros,** ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és
$$f(-x) = f(x).$$

- Azt mondjuk, hogy az f **függvény páratlan,** ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és
$$f(-x) = -f(x).$$

4.9 Példa - páros és páratlan függvények



A páros függvények az y tengelyre szimmetrikusak.



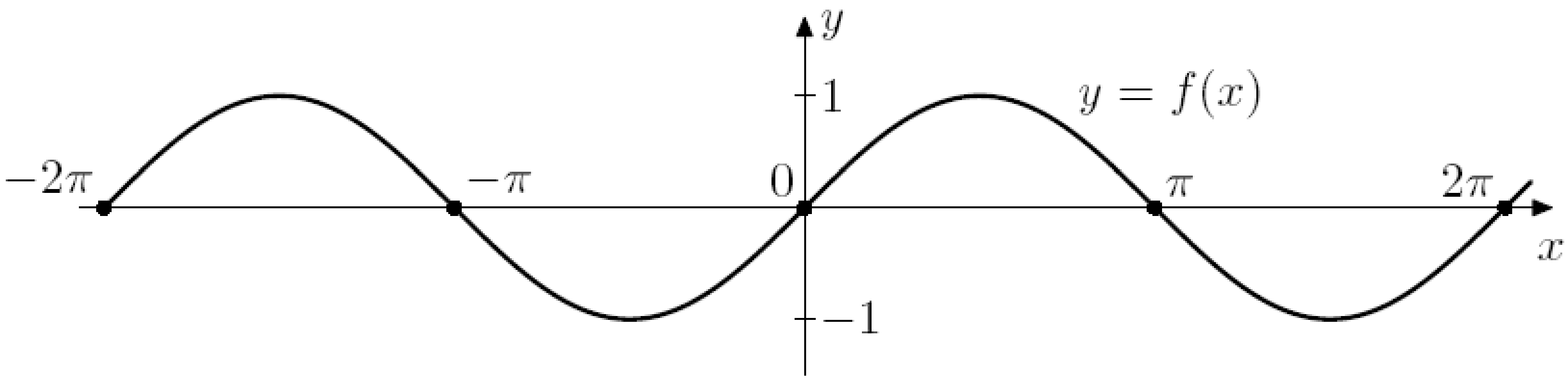
A páratlan függvények az origóra szimmetrikusak.

4.10 Periodikus függvények

Legyen D $\subseteq$ **R**, és f : D $\rightarrow$ **R** adott függvény. Az f **függvény periodikus**, ha létezik p$\in$**R**, p$\neq$0 úgy, minden x $\in$D estén, ha x + p $\in$ D akkor

$$f(x) = f(x+p).$$

Ekkor a p számot **periódus**nak nevezzük.



5. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK NEVEZETES OSZTÁLYAI, ELEMI FÜGGVÉNYEK

5.1 Egyváltozós valós függvények nevezetes osztályai

I. **Algebrai függvények**
   - Racionális egész függvények (polinomok)
   - Racionális törtfüggvények
   - Irracionális függvények

II. **Transzcendens függvények**
   - Exponenciális és logaritmikus függvények
   - Trigonometrikus és arcus függvények

III. **Egyéb nevezetes függvények**
   - Abszolútérték függvény
   - Előljel- (vagy signum) függvény
   - Egészrész és törtrész függvény

5.2 Algebrai függvény fogalma

Algebrai függvényeknek nevezzük az olyan függvényeket, amelyeket a négy alapművelet, a természetes kitevőjű hatványozás és a gyökvonás véges számú, egymást követő alkalmazásával adhatunk meg.

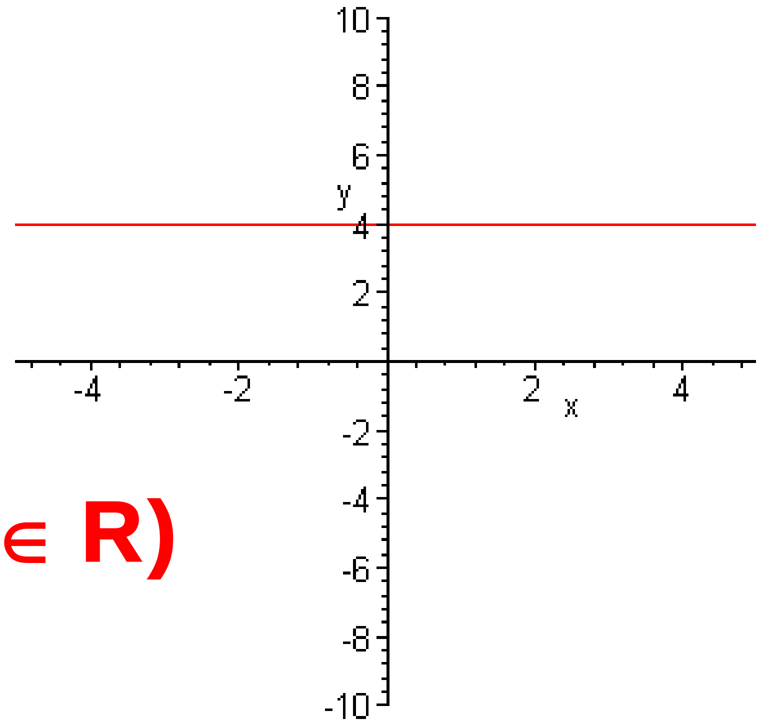
- Azokat az algebrai függvényeket, amelyek képletében csak a négy alapművelet és az egész kitevőjű hatványozás fordul elő, **racionális függvény**nek nevezzük.
- Két racionális függvény hányadosát **racionális törtfüggvény**nek nevezzük.
- **Irracionális függvény**eknek nevezzük azokat az algebrai függvényeket, amelyek nem racionális függvények.

5.2 Algebrai függvények

1.) Konstansfüggvény
2.) Elsőfokú vagy lineáris függvény
3.) Másodfokú függvény
4.) Hatványfüggvény

5.2.1 Konstans függvény

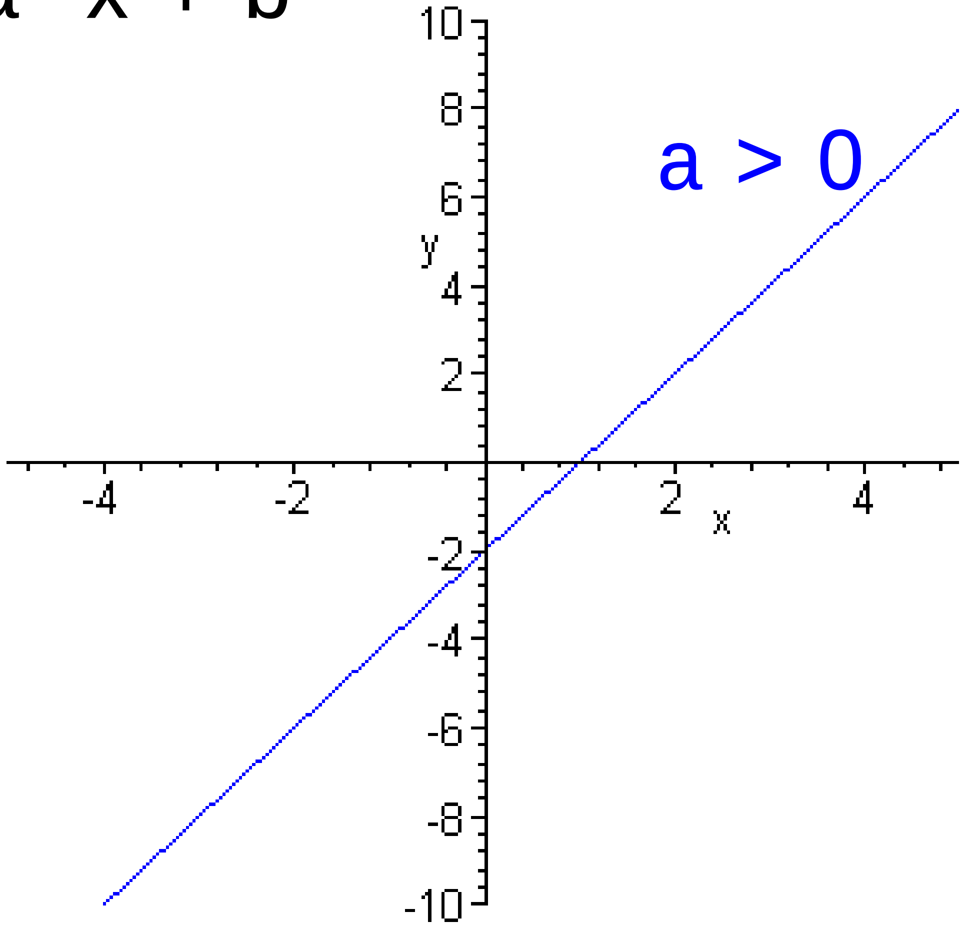
Az *f* matematikai függvényt **konstans függvény**nek nevezzük, ha az értelmezési tartomány minden elméhez az értékkészletnek ugyanazt az elemét rendeljük hozzá. Szokás nulladfokú függvénynek is nevezni.



$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = c \quad (c \in \mathbf{R})$$

5.2.2 Elsőfokú függvény

Egy, a valós számok halmazán értelmezett f függvény **elsőfokú**, ha van olyan a,b $\in$ **R**, $a \neq 0$, hogy $f(x) = a \cdot x + b$



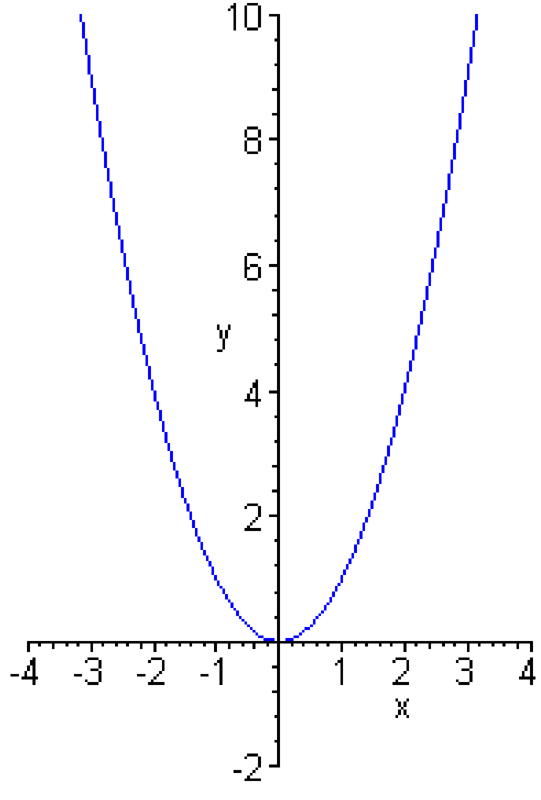
Megjegyzés - Lineáris függvény

Az *f* matematikai függvényt **lineáris függvény**nek nevezzük, ha az nulladfokú, vagy elsőfokú. A hozzárendelés szabálya a következő alakban adható meg: $f(x) = a \cdot x + b$

Ha a értéke 0, akkor konstans függvényről beszélünk, és a grafikonja párhuzamos lesz az *x* tengellyel. Minden más esetben metszi azt.
A „lineáris” szó arra utal, hogy a függvény grafikonja egyenes.

5.2.3 Másodfokú függvény

Egy a valós számok halmazán értelmezett ***f*** függvény **másodfokú**, ha van olyan a, b, c $\in$**R**, a≠0, hogy: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.



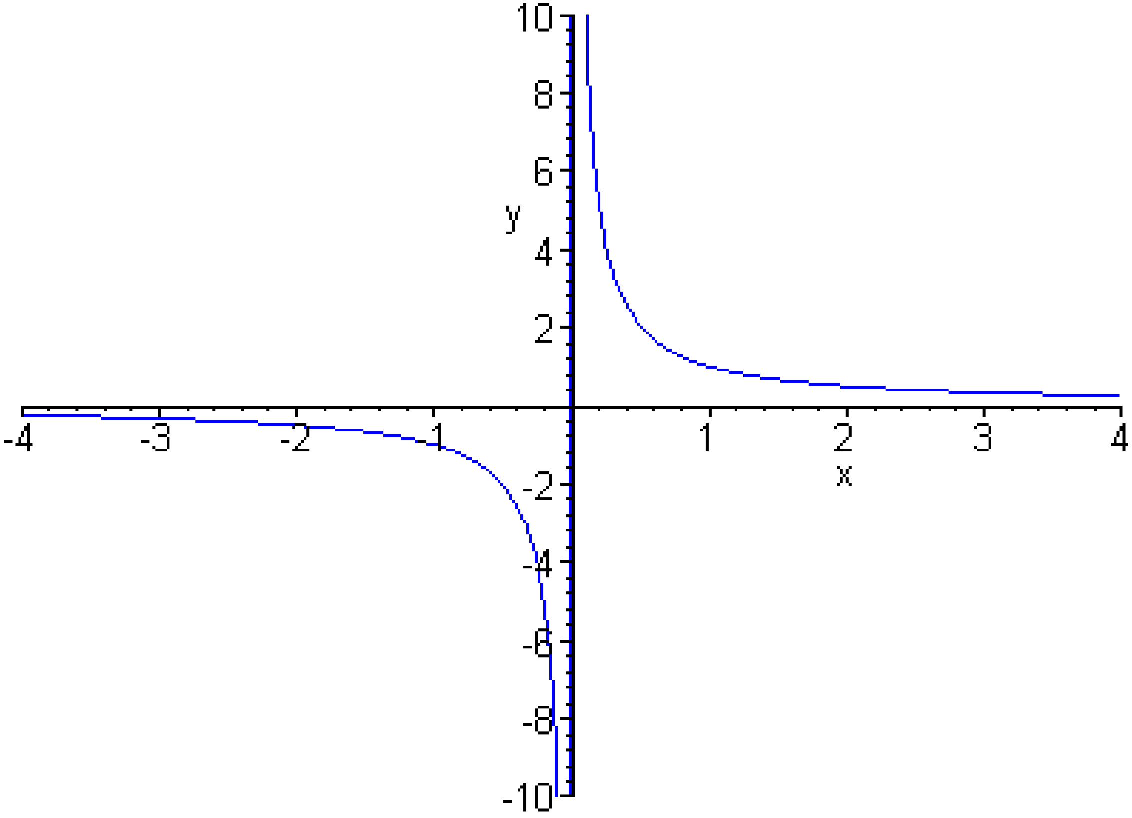
5.2.4 Hatványfüggvény

$\boldsymbol{f}$**: R → R,** $\boldsymbol{f}$ **(x) = x$^{\mathbf{n}}$** $(n \in \mathbf{N})$ függvényt **hatványfüggvény**nek nevezzük.

A függvény képét az határozza meg, hogy az n páros vagy páratlan.

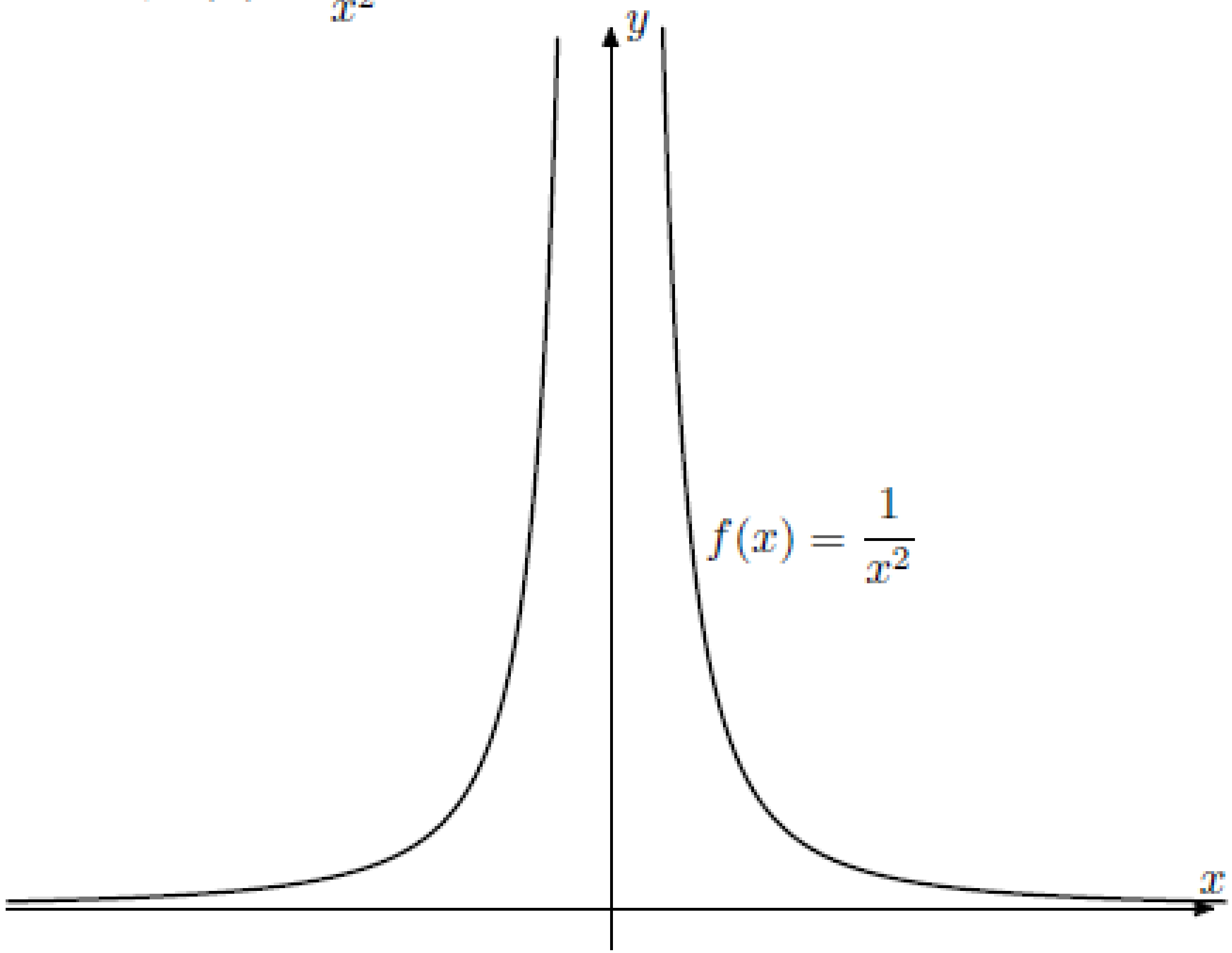
5.2.5 Irracionális függvények - törtfüggvények

A legegyszerűbb **törtfüggvény** az $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = 1/x$ függvény.



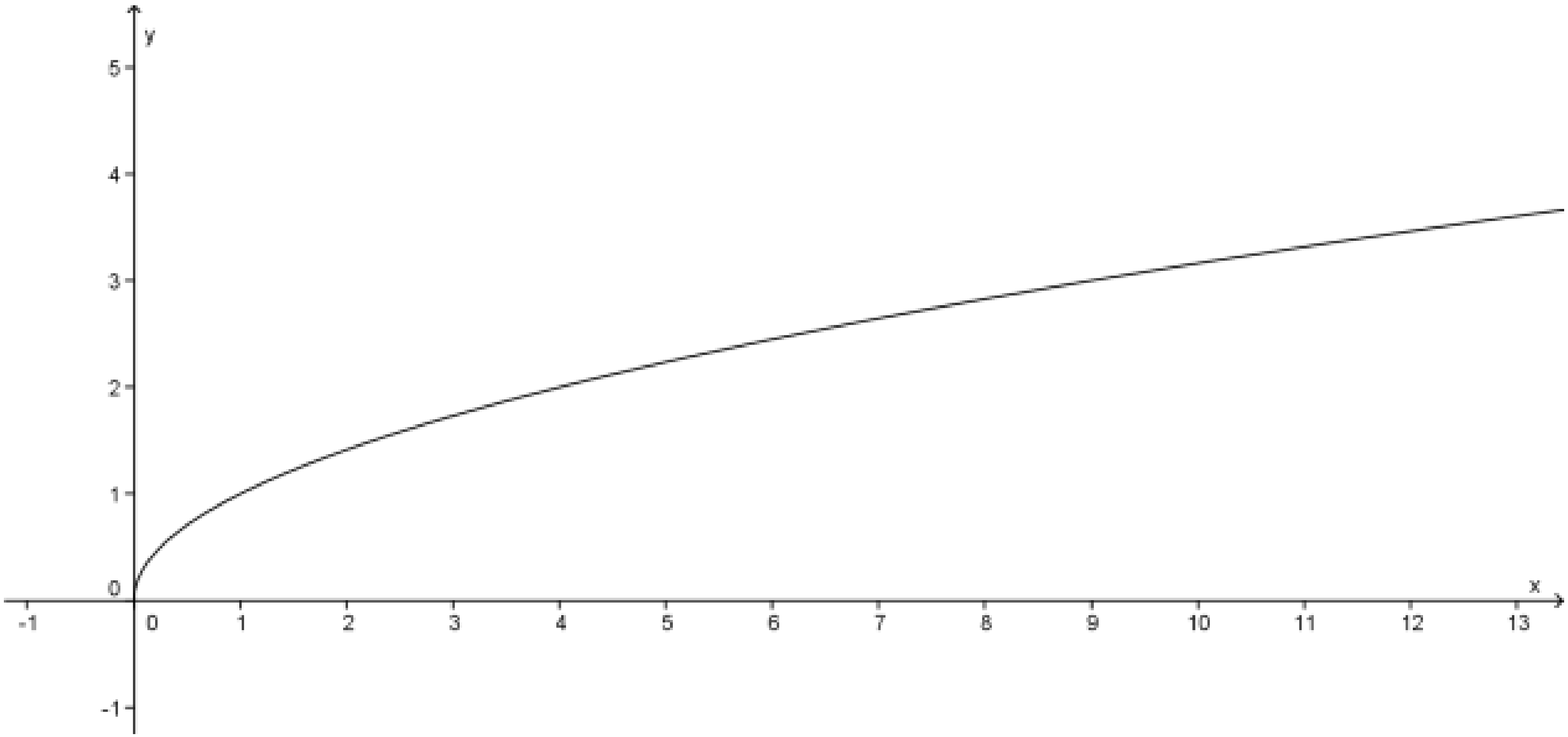
5.2.5 Irracionális függvények - törtfüggvények

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}.$



5.2.6 Négyzetgyök függvény

Négyzetgyökfüggvény $f : \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$,
$f(x) = x^{1/2}$, $x \geq 0$.



5.3 Transzcendens függvények

Transzcendens függvényeknek a nem algebrai függvényeket nevezzük.

- Exponenciális és logaritmikus függvények
- Trigonometrikus függvények

5.3.1 Exponenciális függvények

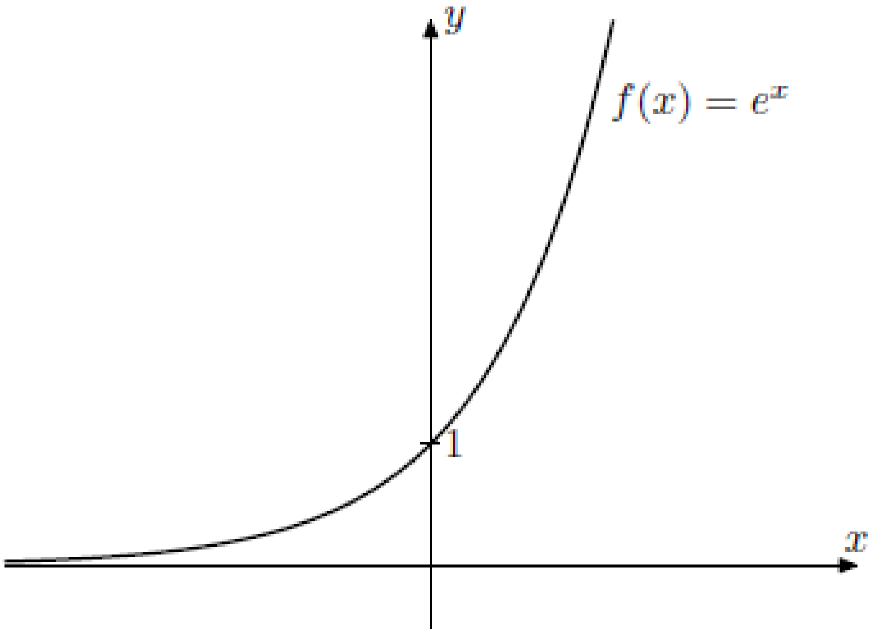
Legyen adott $a>0$, $a \neq 1$ valós szám. Egy a valós számok halmazán értelmezett szigorúan monoton *f* függvényt a-alapú exponenciális függvénynek nevezünk, ha $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ minden x racionális szám esetén. A grafikon az *y*-tengelyt a (0;1) pontban metszi.

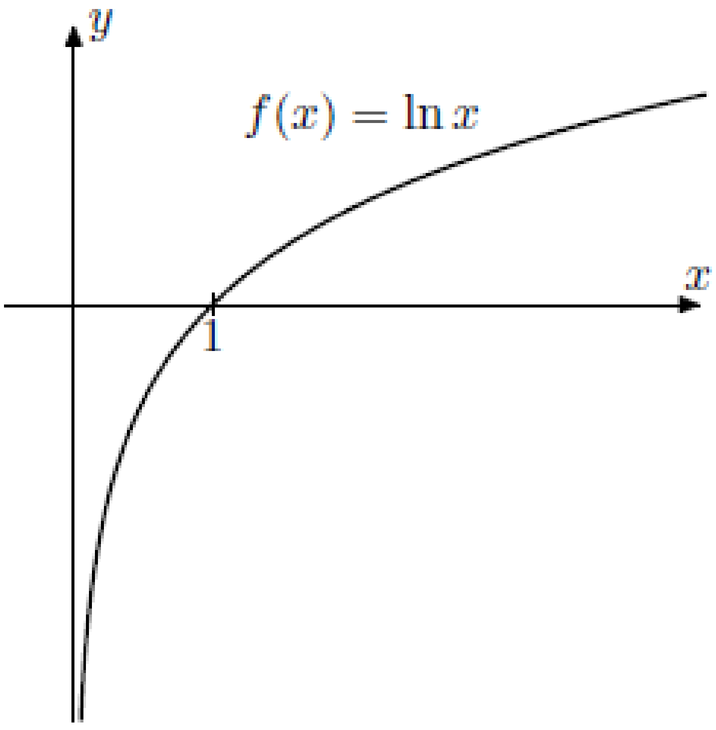
5.3.2 Logaritmikus függvények

Legyen adott $a>0$, $a\neq1$ valós szám. Azt a valós számok halmazán értelmezett *f* függvényt, amely az a-alapú exponenciális függvény inverz függvénye alapú logaritmus függvénynek nevezzük, és $f(x) = \log_a x$ módon jelöljük.

A grafikon az *x*-tengelyt az (1;0) pontban metszi.

5.3.1-2 Az **e^x és az lnx függvény**





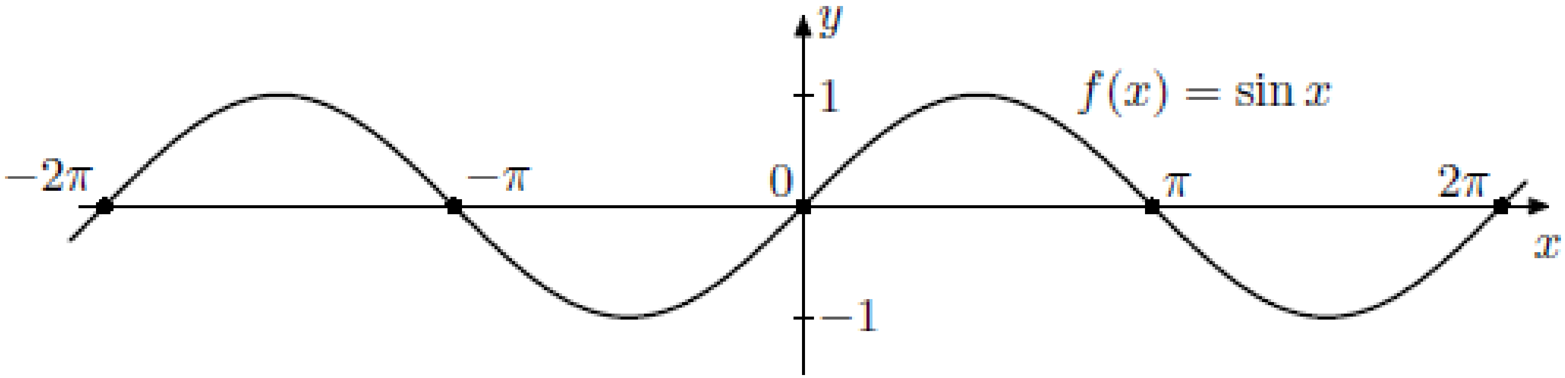
5.3 Trigonometrikus függvények

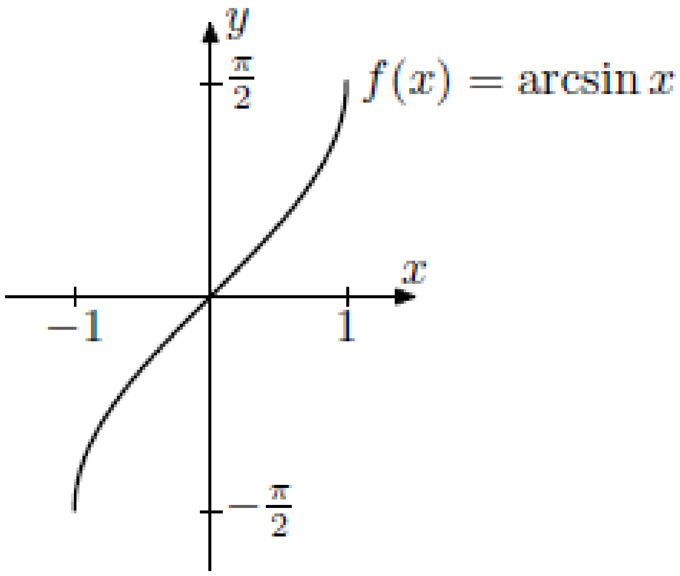
Azokat a függvényeket, amelyek az $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \cos x$ függvényekből, valamint a valós számokból véges sok összeadás, kivonás, szorzás és osztás útján állíthatók elő, **trigonometrikus függvény**eknek nevezzük.

5.3.1 A *sin x* függvény fogalma

Azt a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amely minden valós számhoz az ugyanennyi radián ívmértékű szög sinusát rendeli sinus-függvénynek nevezzük, és $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$ módon jelöljük.

5.3.1 A *sin x* függvény és inverze

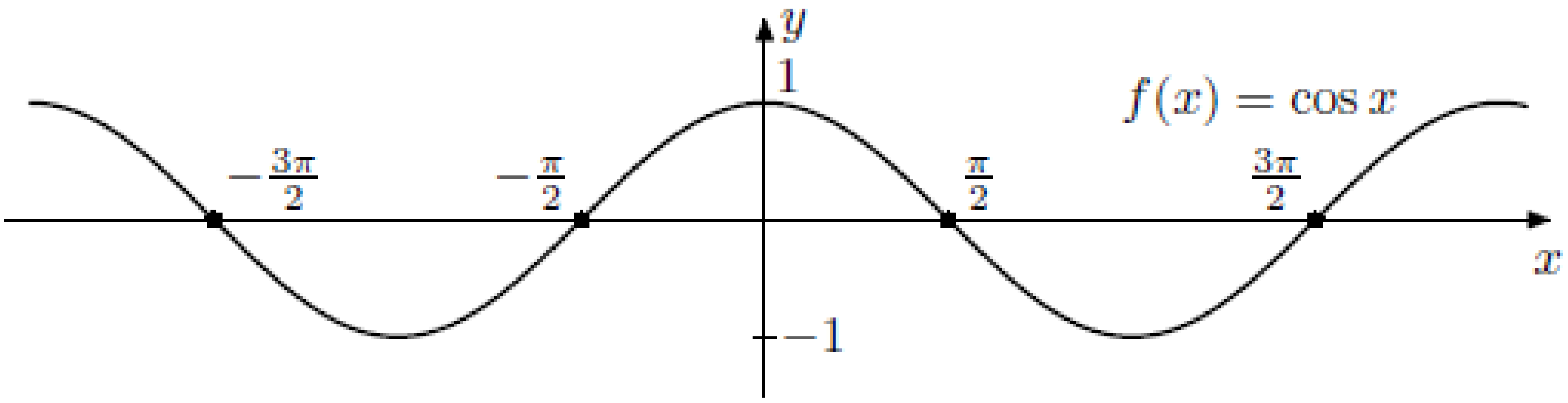


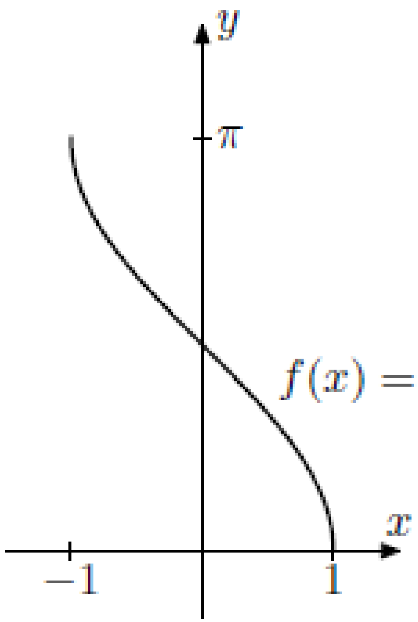


5.3.2 A *cos x* függvény fogalma

Azt a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amely minden valós számhoz az ugyanennyi radián ívmértékű szög cosinusát rendeli cosinus-függvénynek nevezzük, és $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$ módon jelöljük.

5.3.2 A *cos x* függvény és inverze

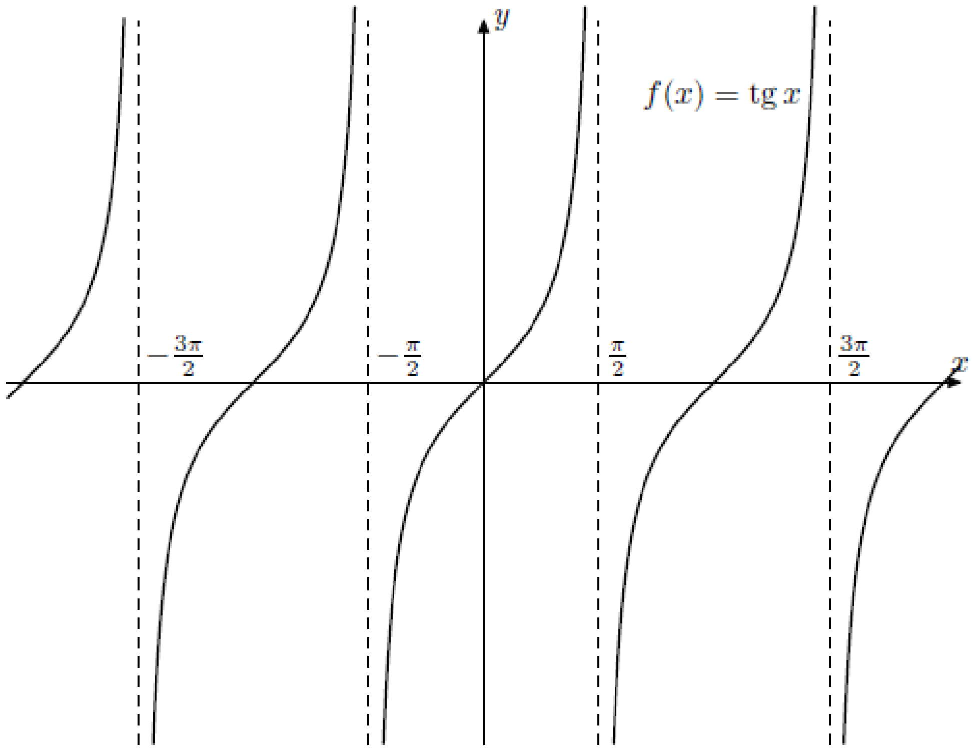


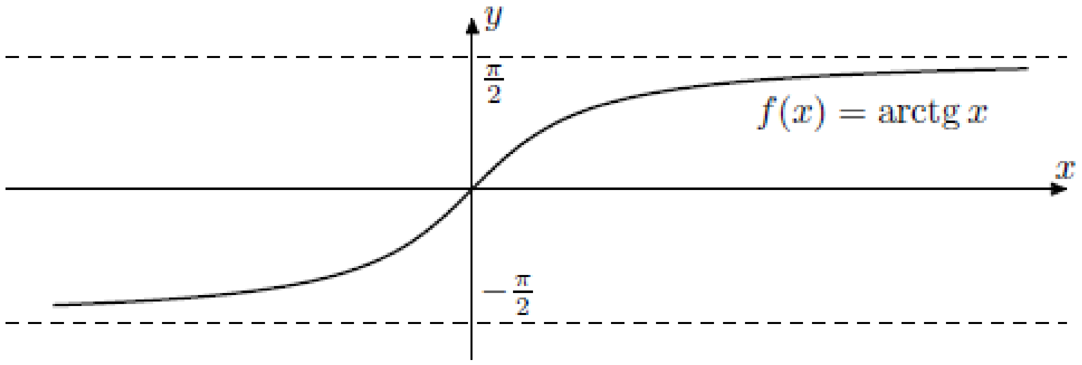


5.3.3 A *tg x* függvény és inverze

Azt a $]-\pi/2, \pi/2[$ intervallumon értelmezett f függvényt, amely minden valós számhoz az ugyanannyi radián ívmértékű szög tangensét rendeli tangensfüggvénynek nevezzük, és $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ módon jelöljük.

5.3.3 A *tg x* függvény és inverze

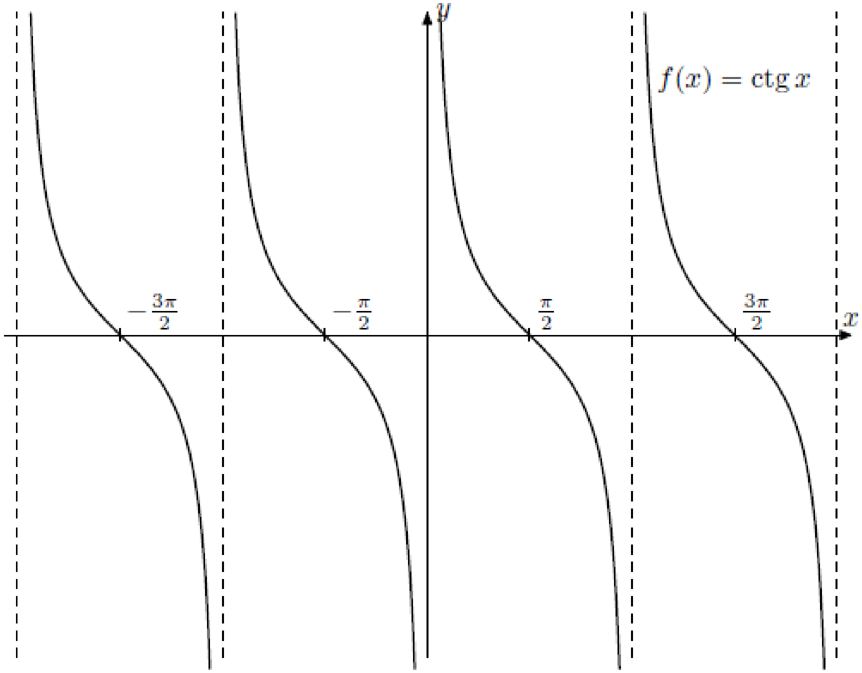


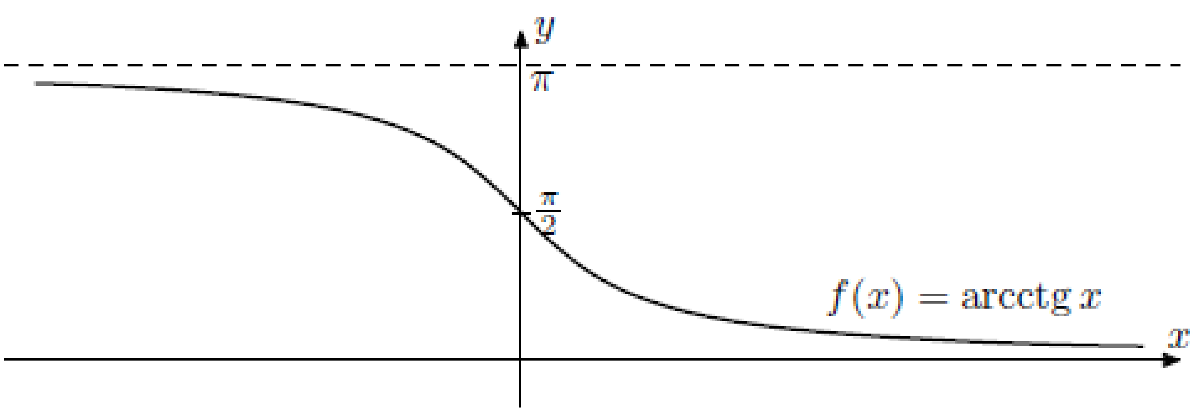


5.3.4 A *ctg x* függvény és inverze

Azt a $]0, \pi[$ intervallumon értelmezett f függvényt, amely minden valós számhoz az ugyanannyi radián ívmértékű szög cotangensét rendeli cotangensfüggvénynek nevezzük, és $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ módon jelöljük.

5.3.4 A *ctg x* függvény és inverze





5.4 Egyéb, nevezetes függvények

5.4.1 Abszolútérték függvény

5.4.2 Signum (vagy előjel) függvény

5.4.3 Egészrész függvény

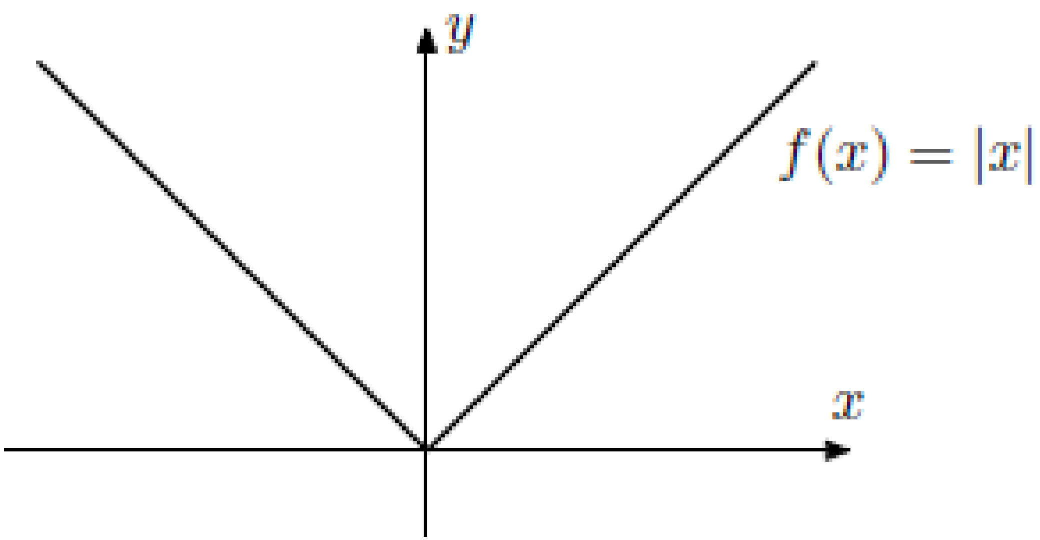
5.4.4 Törtrész függvény

5.4.1 Az abszolút-érték függvény

Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0 \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt **abszolút érték függvény**nek nevezzük.

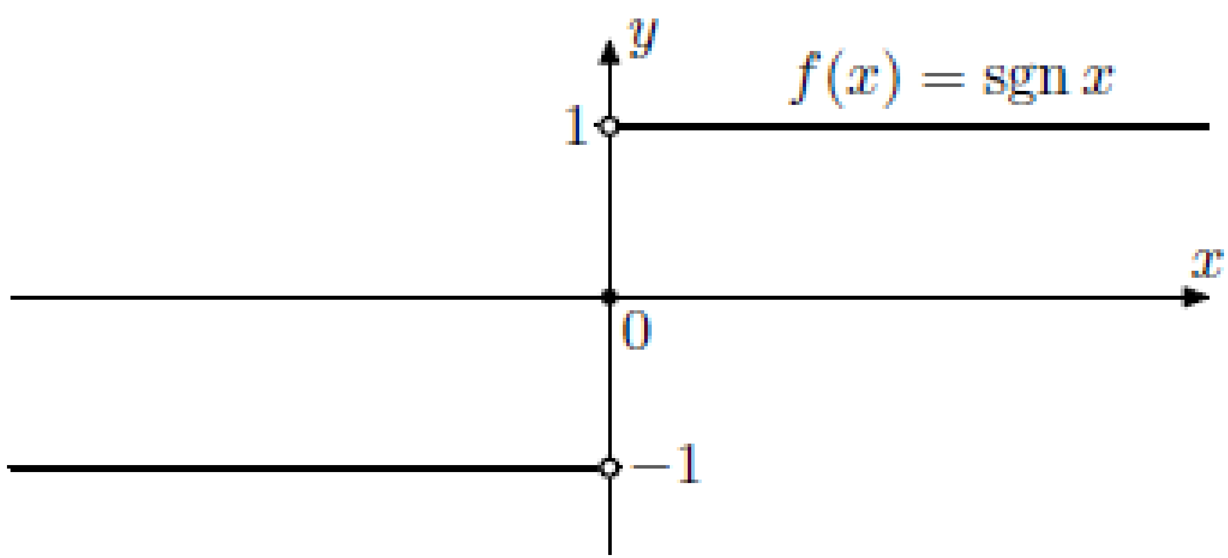


5.4.2 Az előjel függvény

Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt **signum vagy előjel függvény**nek nevezzük.



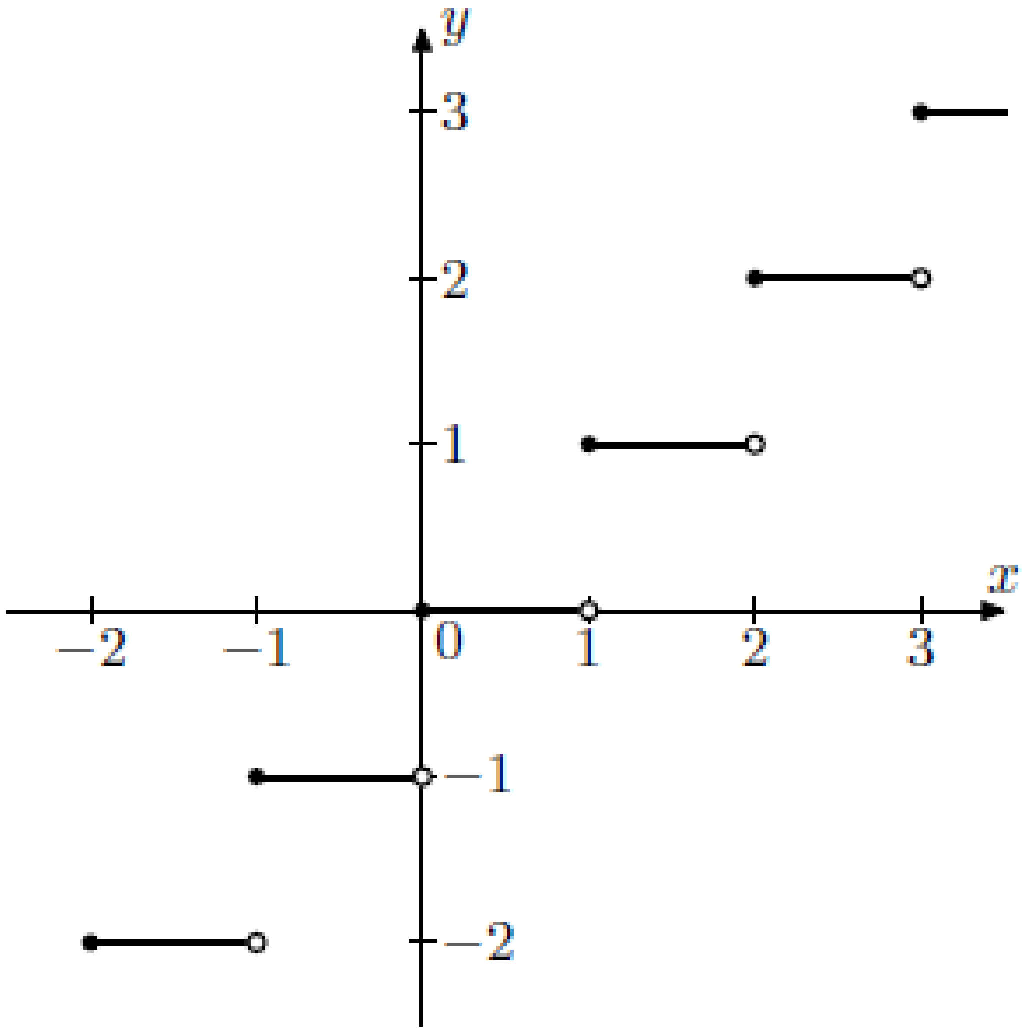
5.4.3-4 Egészrész- és törtrész függvény

- Egy x $\in$ **R** **szám egészrészé**nek a nála nem nagyobb egész számok legnagyobbikát nevezzük. **Jele: [x]**

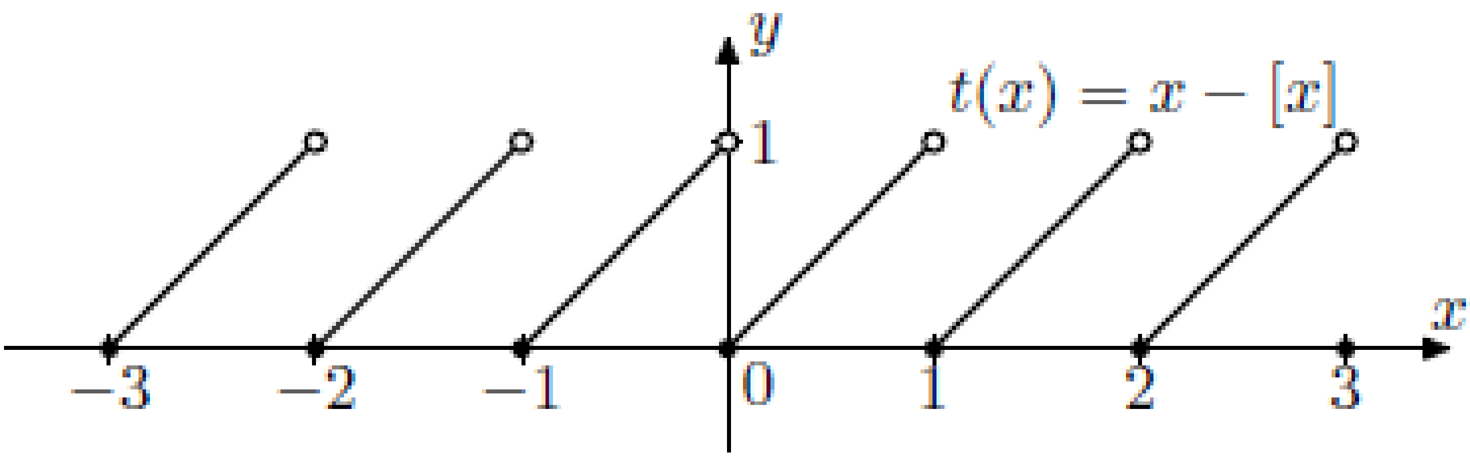
- Egy x $\in$ **R** **szám törtrészé**nek az x - [x] számot hívjuk.

- **Egészrész függvény**nek az a : **R** $\rightarrow$ **R,** a **(x) = [x]** függvényt, **törtrész függvény**nek t : **R** $\rightarrow$ **R,** t **(x) = x - [x]** függvényt nevezzük.

5.4.3 Egészrész függvény



5.4.4 Törtrész függvény



6. FÜGGVÉNY-TRANSZFORMÁCIÓK

6.1 Függvény-transzformáció fogalma
6.2 Eltolás az ordináta (y tengely) mentén
6.3 Eltolás az abcissza (x tengely) mentén
6.4 Abcissza-tengelyre merőleges k-szoros nyújtás
6.5 Az x tengelyre való tükrözés
6.6 Az ordinátatengelyre merőleges d-szeres nyújtás vagy zsugorítás

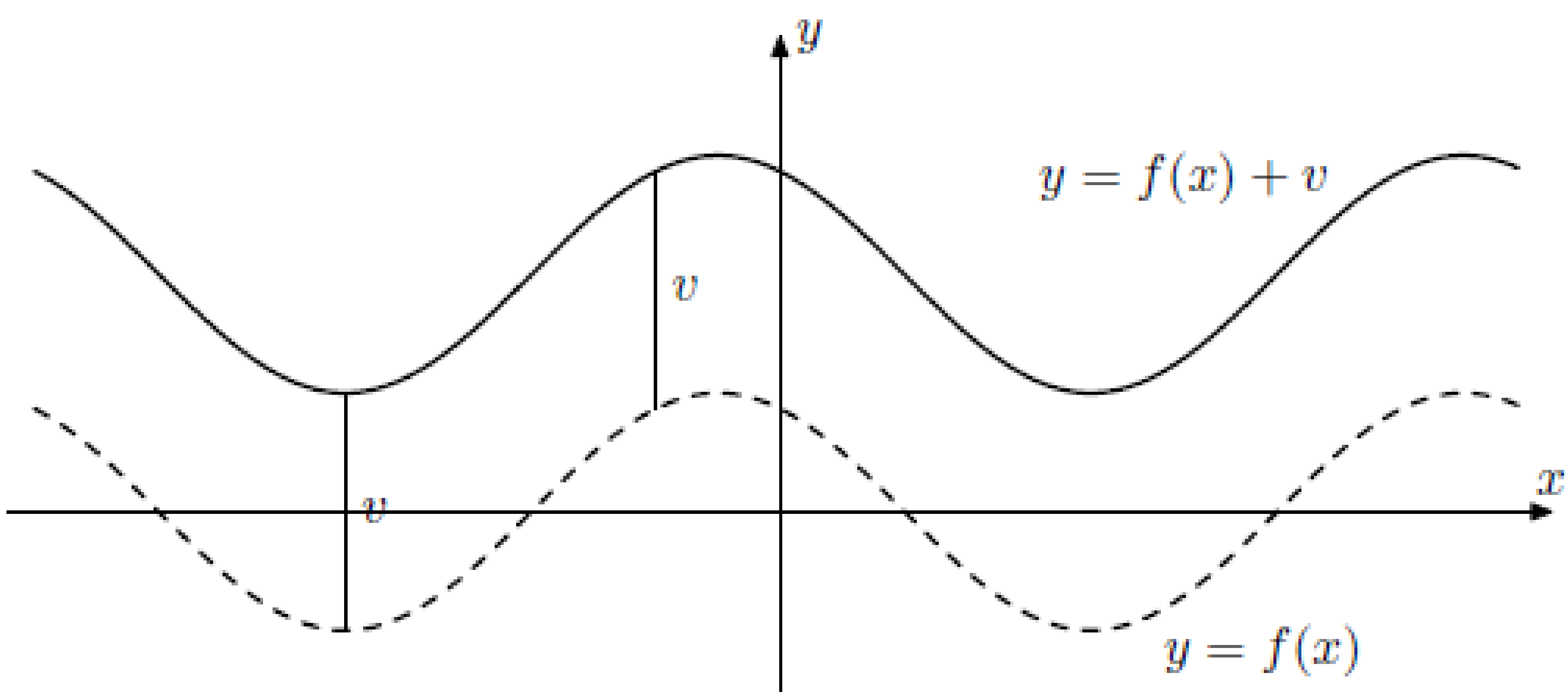
6.1 Függvény-transzformáció fogalma

A függvény ábrázolását legtöbbször megkönnyíti az, ha egyszerűbb függvények segítségével, több lépésen keresztül jutunk el a grafikonhoz. Ezt az eljárást **függvény-transzformáció**nak nevezzük.

Tegyük fel, hogy az f függvény grafikonját ismerjük a Descartes-féle koordináta rendszerben.

6.2 Eltolás az ordináta tengely (y tengely) mentén

Legyen v rögzített valós szám. Az $f + v$, vagyis az $x \mapsto f(x) + v$, $x \in D_f$, függvény görbéje az f függvény görbéjének y irányú eltolásával nyerhető.



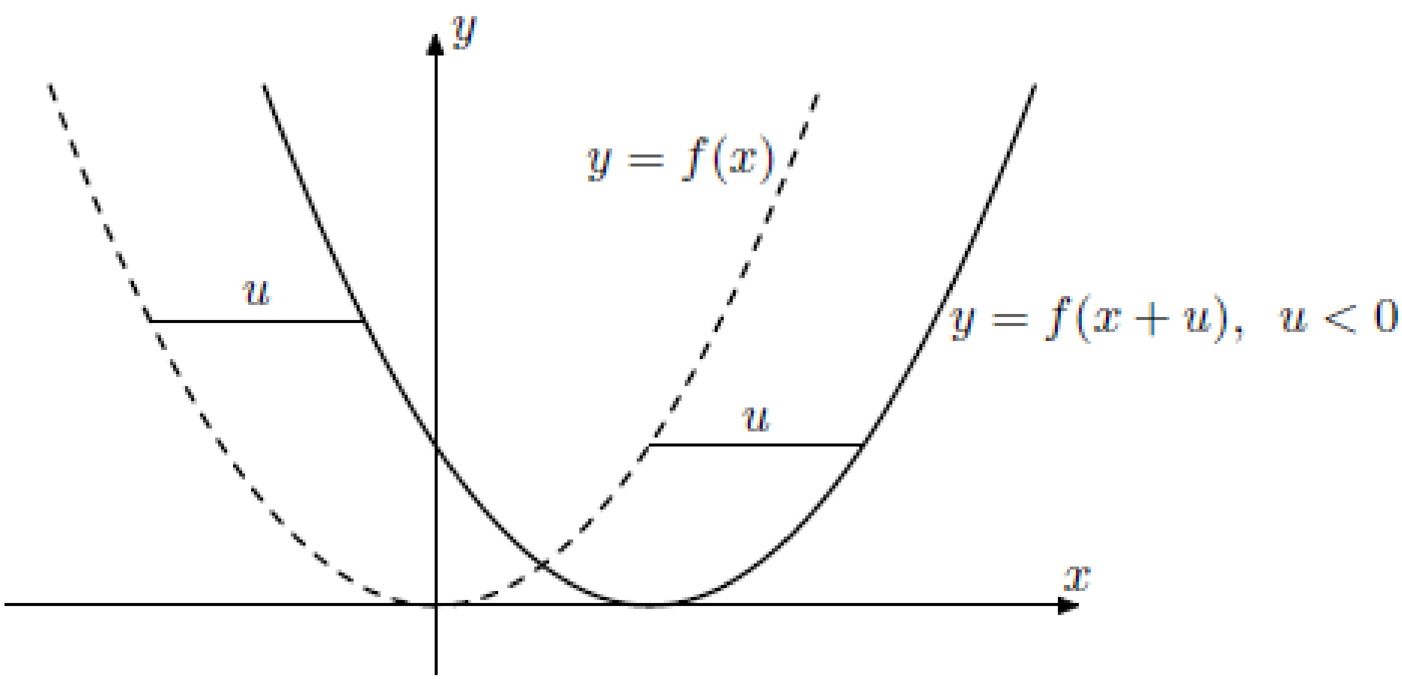
6.2.1 Példa - eltolás az ordináta tengely (y tengely) mentén

Ábrázolja és jellemezze a következő függvényeket:

- $f(x) = |x| - 3$
- $g(x) = x^2 + 1$
- $h(x) = 2x + 1{,}5$
- $l(x) = \ln x - 2$

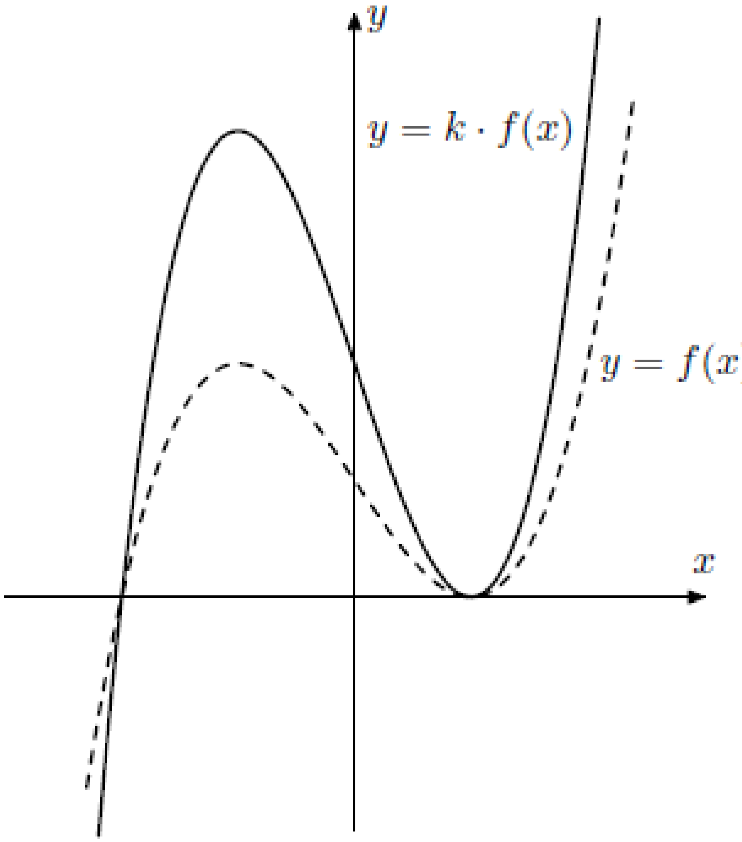
6.3 Eltolás az abcissza tengely (x tengely) mentén

Az $x \mapsto f(x+u)$, $(x+u) \in D_f$ függvény ábrája az f függvény ábrájának az x tengely irányú eltolásával adódik.



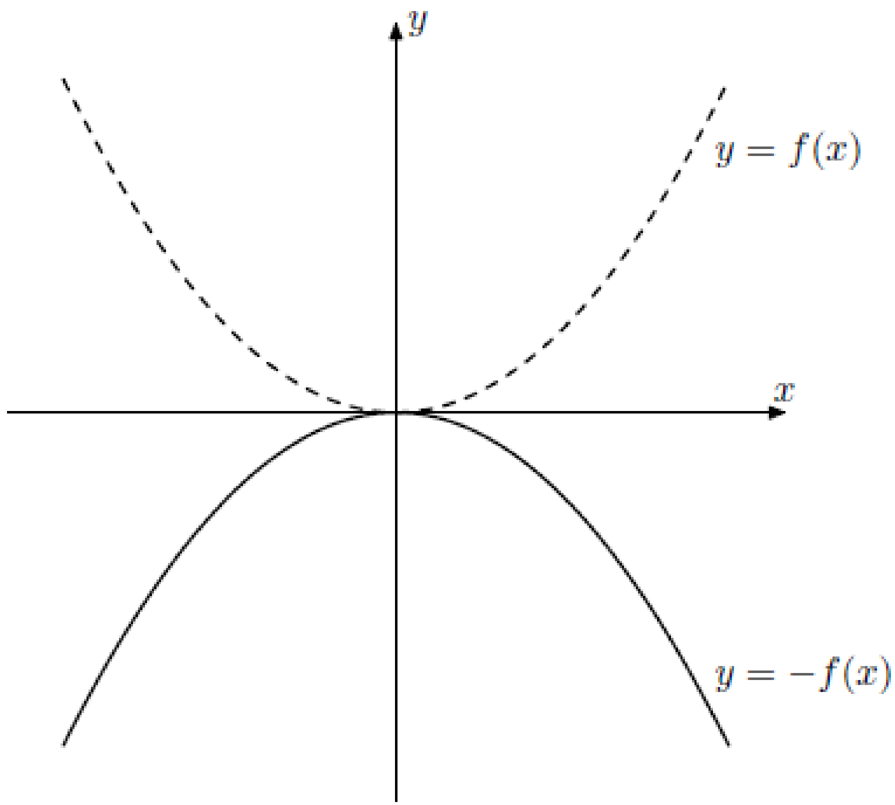
6.4 Abcissza-tengelyre merőleges k-szoros nyújtás

A $k \cdot f(x)$, vagyis az $x \mapsto k \cdot f(x)$, $x \in D_f$, $k > 0$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának y irányú k-szoros nyújtásával kapható meg.



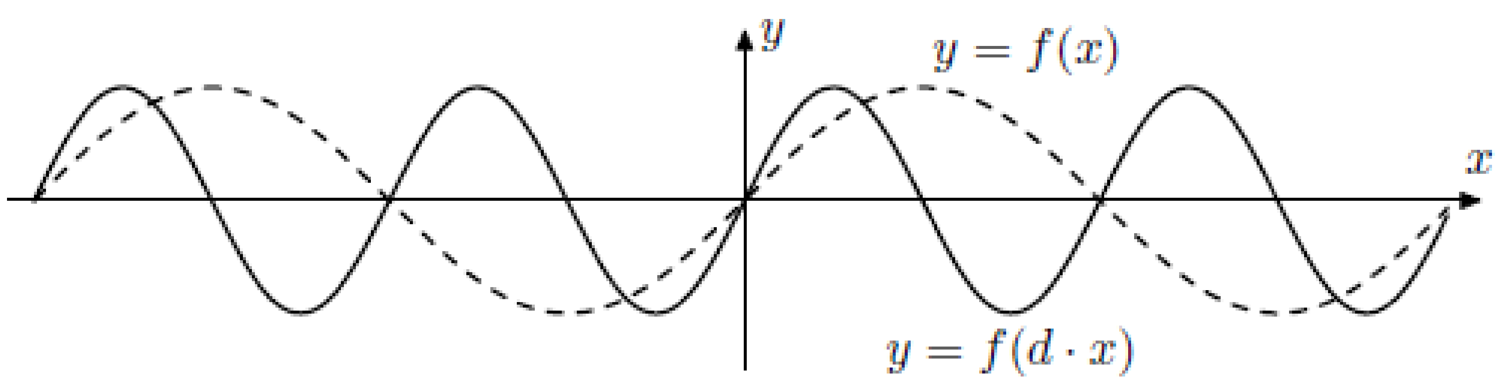
6.5 Az x tengelyre való tükrözés

A $-f$, vagyis az $x \mapsto -f(x)$, $x \in D_f$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának az x tengelyre vonatkozó tükörképe.



6.6 Az ordinátatengelyre merőleges d-szeres nyújtás vagy zsugorítás

Az $x \mapsto f(d \cdot x)$, $d \cdot x \in D_f$ függvény grafikonját az f függvény grafikonjának x-tengely irányú, az Y tengelytől számított 1/d-szeres változtatásával kapjuk. Ez $0 < d < 1$ esetén **nyújtás**t jelent, $d > 1$ esetén **zsugorítás**t.



Köszönöm a figyelmet!