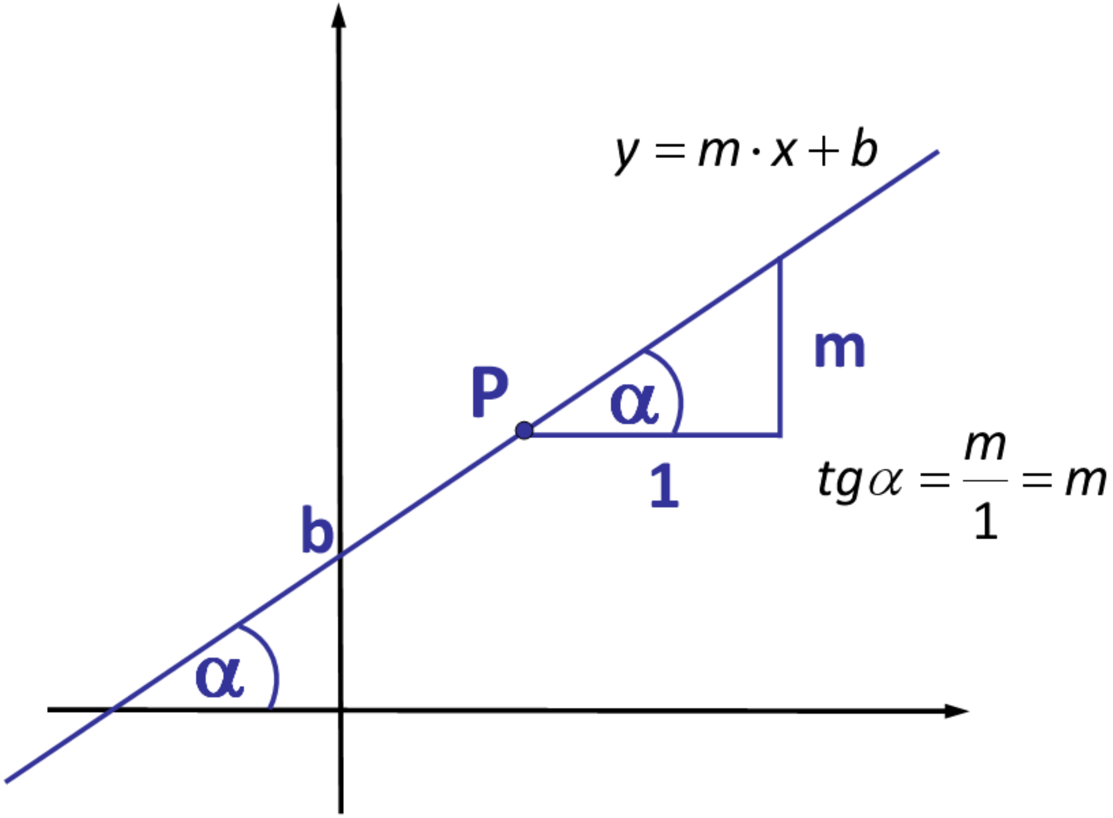
Differenciálszámítás

Dr. Vincze Szilvia

10. BEVEZETÉS A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSBA

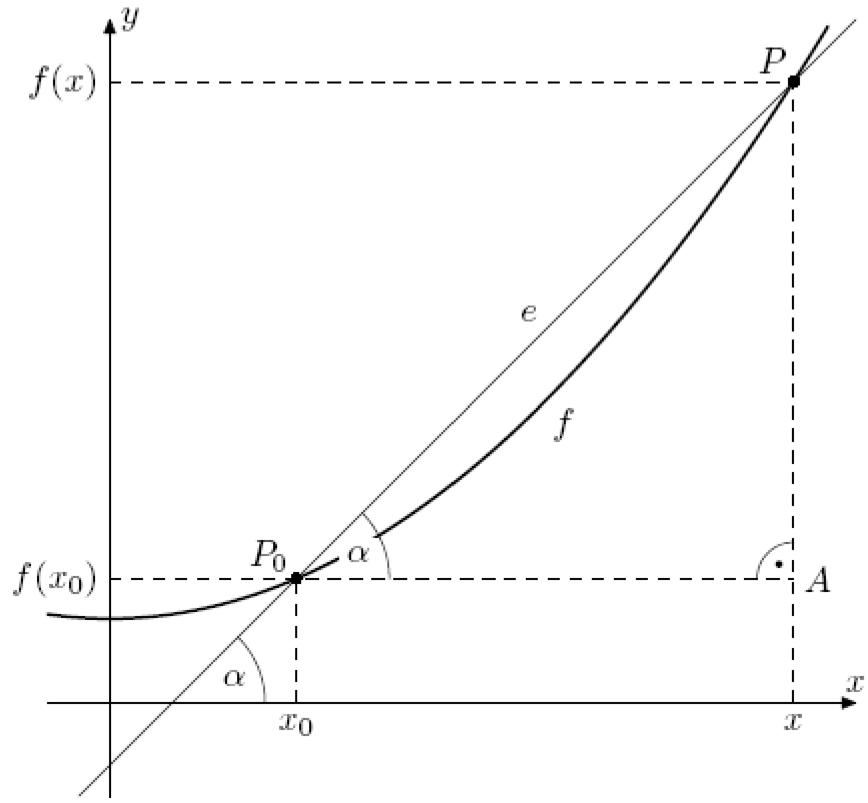
Meredekség: az irányszög tangense



10.2 Differencia-hányados fogalma

Tekintsük az *f* függvény grafikonját és a grafikon x_0 és x ($x_0 \neq x$) abcisszájú pontjain áthaladó e egyenest.

Ezt az e egyenest nevezzük a függvény **$P_0(x_0, f(x_0))$ és $P(x, f(x))$** pontjaihoz tartozó **szelő**nek.



10.2 Differencia-hányados fogalma

A szelő meredeksége az APP_0 háromszög segítségével:

$$m = tg\alpha = \frac{\textit{szöggel szemközti befogó}}{\textit{szög melletti befogó}} =$$

$$= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

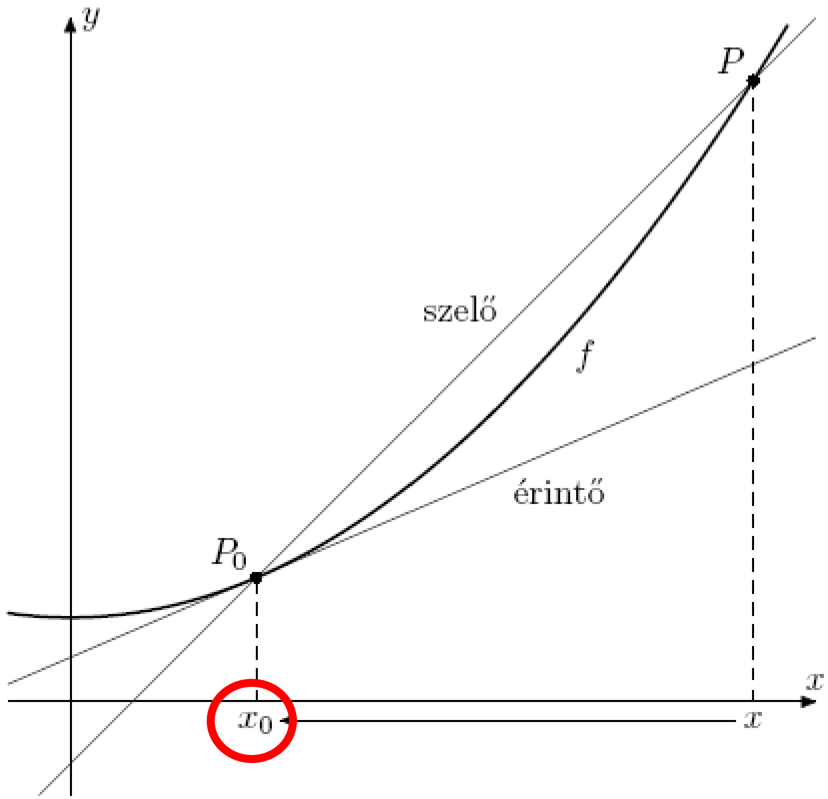
10.2 Differencia-hányados fogalma

Definíció: Legyen $H \subseteq$ **R.** Az **x_0 a H belső pontja**, ha van az x_0-nak olyan D nyílt környezete, melyre $D \subseteq H$.

Definíció: Legyen $H \subseteq R$, $x_0 \in H$ belső pont, f: $H \to$ **R.** Az f függvény x_0-beli **differenciahányados függvénye:**

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0$$

Differencia- és differenciálhányados kapcsolata



Rögzítsük az x_0 pontot. Ha x_0 rögzített és az x tetszőleges, akkor a szelő meredeksége függ az x megválasztásától. Közelítsünk az x ponttal az x_0-hoz!

10.3 Differenciál-hányados fogalma

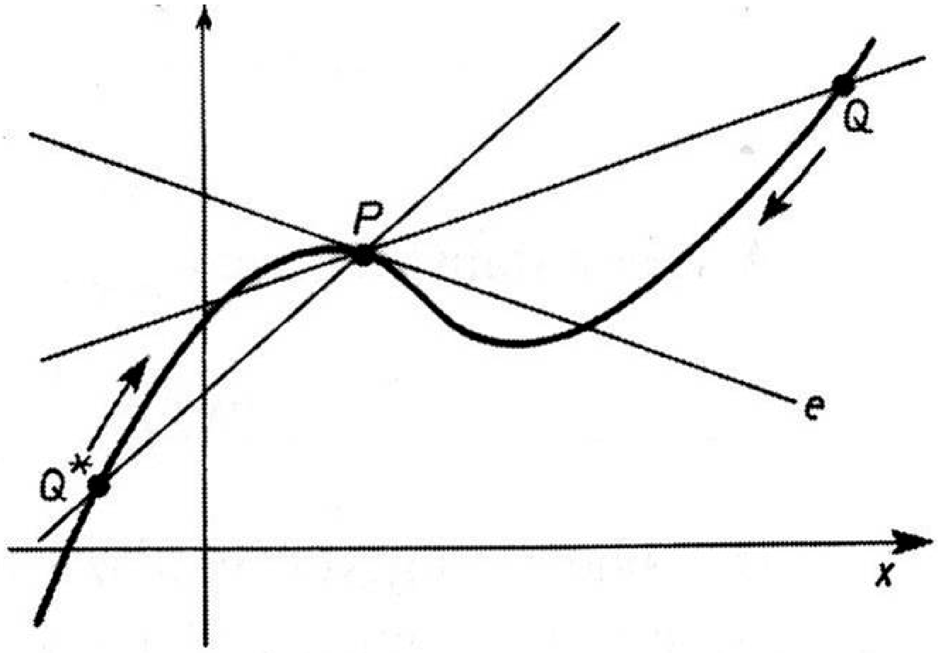
Ha létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték, akkor ez az *f* függvény (x_0, $f(x_0)$) pontjához tartozó **érintő meredeksége**.

10.3 Érintő értelmezése

1.) Legyen az f(x) függvény mindenütt folytonos.
2.) Rögzítsünk a függvénygörbén egy *P* pontot és egy a *P*-től különböző tetszőleges Q (vagy Q*) pontot.
3.) Mozgassuk a *Q* (vagy *Q**) pontot a *P* pont felé, ekkor a *PQ* (vagy *PQ**) szelő egy *„határhelyzethez”*, egy *e* egyeneshez közeledik, amely áthalad a *P* ponton
4.) Ezt a közös *e* egyenest a függvénygörbe *P* pontbeli **érintőjé**nek nevezzük



10.3 Differenciál-hányados fogalma

Legyen $f : H \to \mathbf{R}$ és $x_0 \in H$ belső pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható az x_0 pontban, ha a differenciahányados függvénynek létezik az x_0 pontban véges határértéke. A

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

számot az f függvény x_0-beli **differenciálhányados**ának nevezzük.

Megjegyzések

- Ha a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **nem differenciálható** az x_0 pontban.
- Ha az f : D$\to$ **R** függvény a D $\subseteq$ H halmaz minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az ***f* függvény differenciálható a D halmazon**. Ha az f függvény az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, akkor az f' : H$\to$ **R** függvény az f **differenciálhányados- függvénye** vagy **derivált-függvénye**.

Megjegyzések

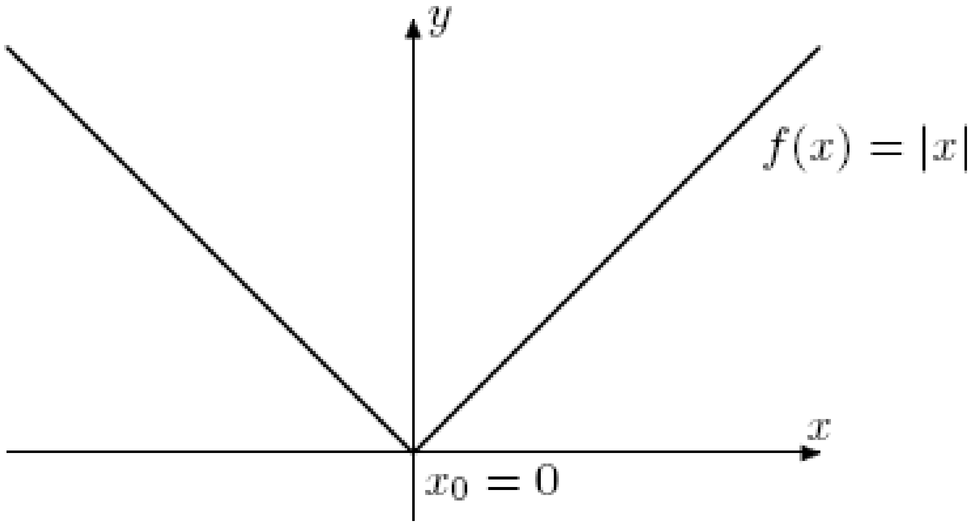
- A **deriváltfüggvény jelölésé**re gyakran használják a $\boxed{\dfrac{df}{dx}}$
- Az f függvény x_0-beli érintőjének az egyenlete:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \left(x - x_0\right)$$

10.4 Folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata

Tétel: Ha az *f*: H $\rightarrow$ **R** függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor *f* folytonos az x_0 pontban.

A tétel nem fordítható meg!
Létezik olyan függvény, amely valamely x_0 pontban folytonos, de ott nem differenciálható.



10.5 Deriválási szabályok

1.) Ha az *f* és *g* függvény differenciálható az x_0-ban, akkor az $(f + g)$ is differenciálható x_0-ban és

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2.) Ha az *f* és *g* függvény differenciálható az x_0-ban, akkor az $(f \cdot g)$ is differenciálható x_0-ban és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

10.5 Deriválási szabályok

3.) Ha az *f* függvény az értelmezési tartomány x_0 pontjában differenciálható és $c \in \mathbf{R}$, $c \cdot f$ függvény is differenciálható x_0-ban és

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

4.) Ha az *f* és *g* függvény differenciálható az x_0-ban és $g'(x_0) \neq 0$, akkor az $(f \,/\, g)$ is differenciálható x_0-ban és

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}}$$

10.5 Deriválási szabályok: összetett függvény deriválási szabálya

5.) Ha H_1, $H_2 \subseteq$ **R**, f: $H_1 \to H_2$, g: $H_2 \to$ **R**. Legyen $x_0 \in H_1$ belső pont, és tegyük fel, hogy $y_0 = f(x_0) \in H_2$ belső pont. Ekkor ha f differenciálható x_0-ban és g differenciálható y_0-ban, akkor $g \circ f$ differenciálható x_0-ban és

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

10.5 Deriválási szabályok: inverz függvény deriválási szabálya

6.) Ha az f: $]a,b[\ \to\ ]c,d[$ kölcsönösen egyértelmű folytonos függvény differenciálható $a < x_0 < b$ pontban és $f\,'(x_0) \neq 0$; akkor az f^{-1}: $]c,d[\ \to\ ]a,b[$ inverz függvény differenciálható $y_0 = f(x_0)$ pontban és

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

10.6 Elemi függvények deriváltjai

0.) $(c)' = 0$

1.) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

2.) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

3.) $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

4.) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5.) $(e^x)' = e^x$

10.6 Elemi függvények deriváltjai

6.) $(\sin x)' = \cos x$

7.) $(\cos x)' = -\sin x$

8.) $$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

9.) $$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

10.) $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11.) $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10.6 Elemi függvények deriváltjai

$$12.) \quad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13.) \quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Köszönöm a figyelmet!