Gazdasági matematika I.

Dr. Vincze Szilvia; vincze@fin.unideb.hu
http://vinczeszilvia.wix.com/vinczeszilvia

I. féléves tematika

- Halmazelmélet, számhalmazok
- Relációk és függvények
- Egyváltozós valós függvények, jellemzőjük, elemi függvények
- Sorozatok, sorozatok határértéke
- Pénzügyi számítások
- Függvény határértéke és folytonossága
- Differenciálszámítás és alkalmazásai
- Parciális deriválás, többváltozós függvények szélsőérték-számítása
- Integrálszámítás és alkalmazásai

Halmazelméleti alapfogalmak

1. HALMAZELMÉLET

1.1 A halmaz fogalma, jelölések
1.2 Halmazok megadása
1.3 Részhalmaz, hatványhalmaz
1.4 Halmazok szemléltetése (Venn-diagram)
1.5 Műveletek halmazokkal
(unió, metszet, komplementer, különbség, szimmetrikus különbség)

1.1 Halmaz fogalma, jelölések

- A **halmaz** fogalmát nem definiáljuk, tulajdonságaival körülírt alapfogalomnak tekintjük.
- A halmazt alkotó dolgok a **halmaz elemei**.
- Az olyan halmazokat, melynek egyetlen elemük sincs **üres halmaz**oknak **(jelölés: ∅)**, azt a halmazt amely minden elemet tartalmaz **alaphalmaz**nak **(jelölés: U)** nevezzük.

1.1 Halmaz fogalma, jelölések

- **Véges és végtelen halmazok**
- **Matematikai értelemben adottnak tekinthető halmaz**

Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyek határoznak meg matematikai értelemben vett halmazt!

H: = { x| x valós szám és x^2=-4 }

K: = { a Debreceni Egyetem 50m^2-nél nagyobb helyiségei }

L: = { prímszámok }

M: = { x| x páratlan természetes szám és x < 10 }

N: = { a világ legnagyobb kikötővárosai }

O: = { x| x város és lakossága 2000. január 1-jén több, mint 500.000 fő }

P: = { tehetséges matematikusok }

1.2 Halmaz megadása

Halmazok megadása:

a) elemeinek felsorolásával;

b) elemeit a rájuk jellemző pontos tulajdonsággal írjuk le.

Példa: Halmaz megadása elemeinek felsorolásával

H: = { 2; 4, 6, 8, 10 }

K: = { orrszarvú, orángután, oroszlán}

Jelölések

$H := \{\ x |\ x \text{ valós szám és } x^2=-4\ \}$

$H := \{\ x |\ x \in \mathbf{R} \text{ és } x^2=-4\ \}$

Jelölések:

2 $\in$ **H** „a kettő eleme a H halmaznak”

3 $\notin$ **H** „a 3 nem eleme a H halmaznak”

Példa: Halmaz megadása tulajdonságával

Fogyasztói elmélet: **költségvetési halmaz**

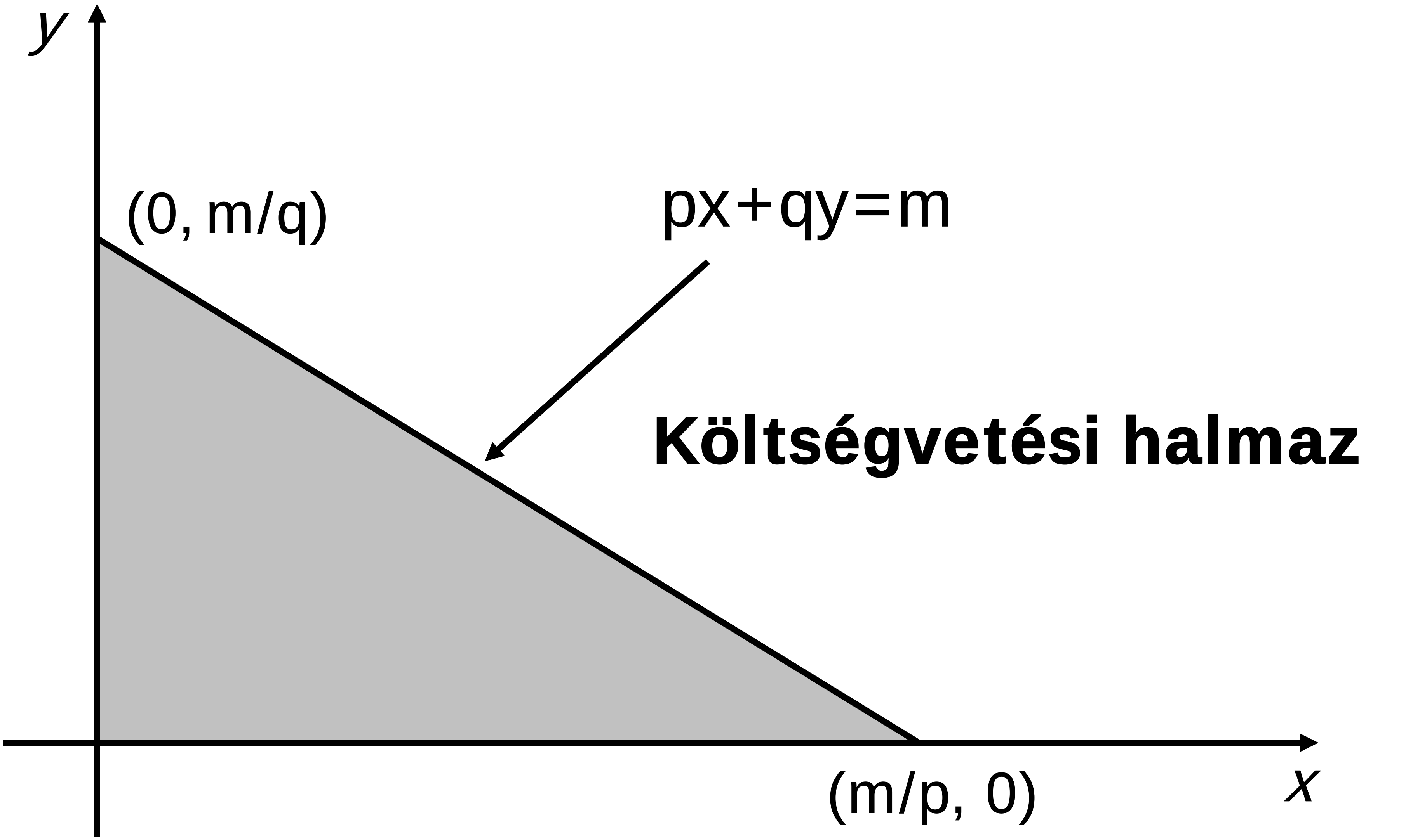
Tegyük fel, hogy kétféle árucikket szeretnénk vásárolni: az elsőből **x**, a másodikból **y** mennyiséget, és az árak rendre **p** és **q**.
Összesen **m** nagyságú összeg áll rendelkezésünkre az árucikkek megvásárlására.

Példa: Halmaz megadása tulajdonságával

- **Jószágkosár:** az árucikkek mennyiségeiből álló **(x,y)** rendezett pár.
- **Jószágkosár értéke**: **px+qy**
- **Költségvetési feltétel: px+qy ≤ m**
- **Költségvetési halmaz** (B) az összes olyan **(x,y)** jószágkosárból áll, amely kielégíti az **px+qy ≤ m** és **x≥0, y≥0** egyenlőtlenségeket.

$$B = \{ \underbrace{(x,y)}_{\text{általános elem}} \mid \overbrace{px+qy \leq m,\ x \geq 0,\ y \geq 0}^{\text{definiáló tulajdonság}} \}$$

Példa: Halmaz megadása tulajdonságával



Példa: Halmazok egyenlősége

Két halmaz egyenlő, ha ugyanazokból az elemekből áll.

Mely halmazok egyenlők?

A: = { 2, 4, 6, 8 }

B: = { páros természetes számok }

C: = { $n \leq 10$ | n természetes szám és páros }

D: = { $n < 10$ | n természetes szám és páros }

1.3 Részhalmaz, hatványhalmaz

- **Részhalmaz, valódi részhalmaz**
  (Jelölés: $\subseteq$, $\subset$)

- **Triviális részhalmaz**

- **A „tartalmazás" tulajdonságai** (reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív)

- **Halmazok egyenlősége** **(Jelölés: H = K)**

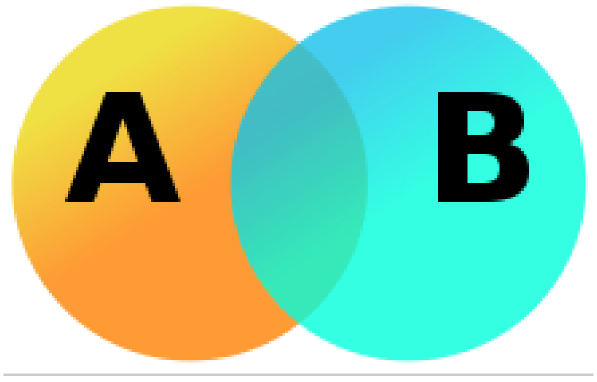
1.3 Részhalmaz, hatványhalmaz

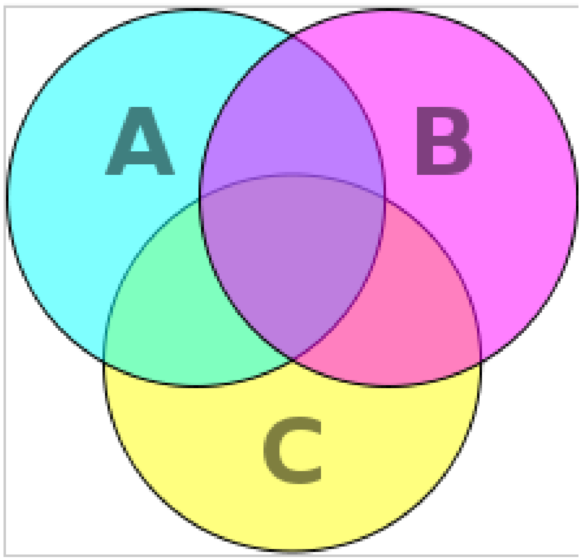
Hatványhalmaz: Egy adott H halmaz összes részhalmazainak halmaza.

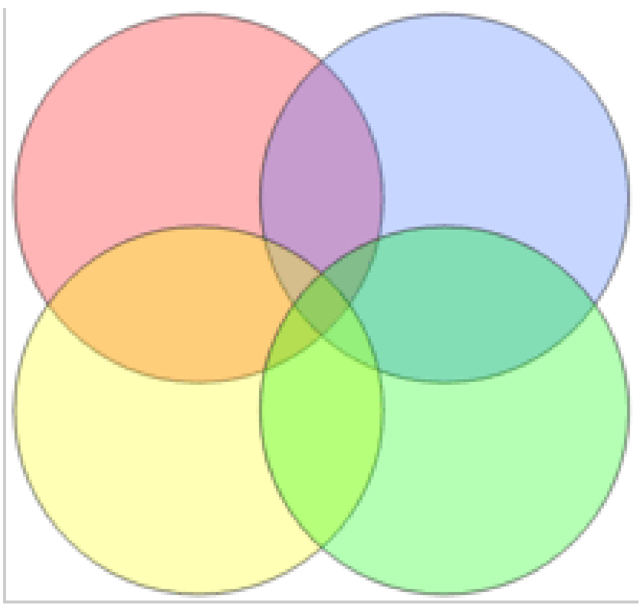
Jelölés: $P(H)$, 2^H

1.4 Halmazok szemléltetése

Venn-diagram







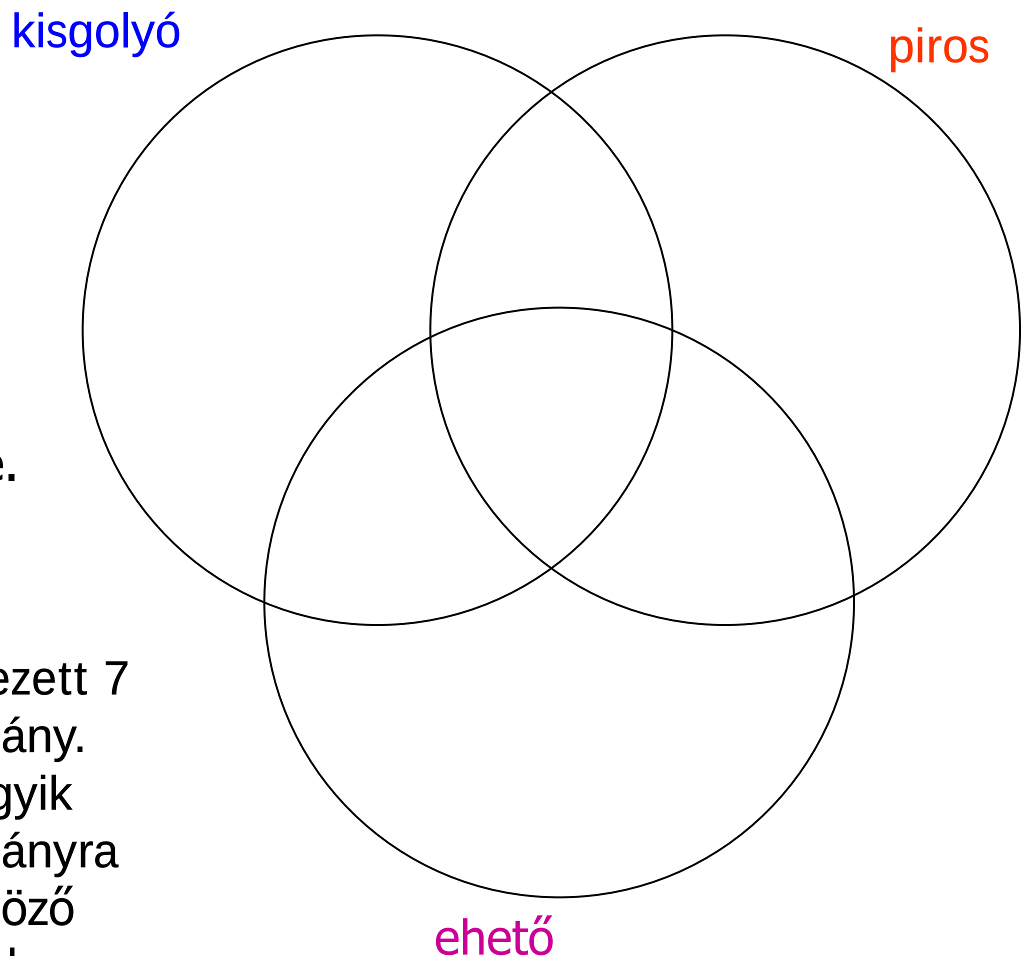
1.4 Példa halmazok szemléltetésére

Tegyük fel, hogy van egy dobozunk

- ♠ kisgolyókkal és kiskockákkal (nem-kisgolyókkal), amik lehetnek
- ♠ piros vagy sárgászöld színűek (nem-piros színűek),
- ♠ ehetőek vagy nem ehetőek.

1.4 Példa halmazok szemléltetésére

A Venn-diagramot három kör alkotja, amelyek mindegyike ‘belelóg’ a másik kettőbe.



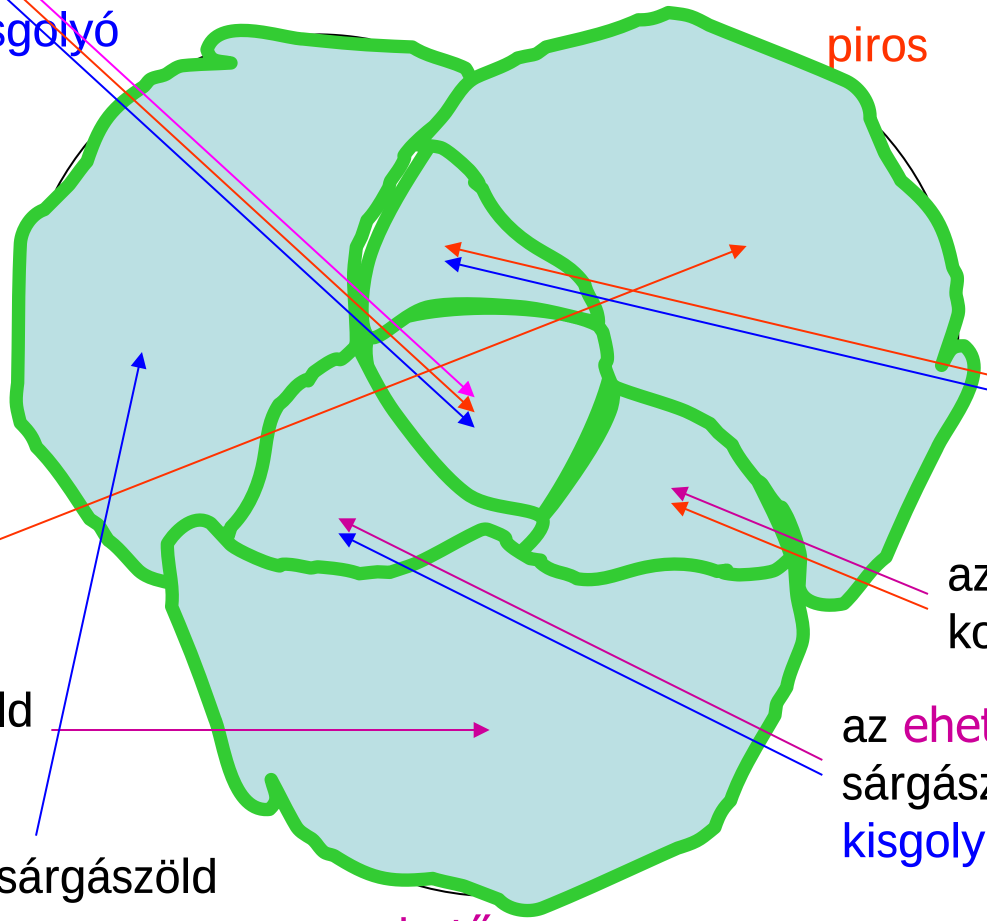
Ugyan (háromszor) két körön is lehet ábrázolni a három állítást, de úgy nem átlátható. Márpedig a Venn-diagramot pont ez utóbbiért találták ki.

Ezáltal keletkezett 7 tartomány. Mindegyik tartományra különböző állítások igazak.

A középső tartományra mind a három állítás igaz.

Tehát ez a tartomány ad otthont az ehető piros kisgolyóknak

És maradt a három ‘nagyobb’ tartomány, amelyre csak az igaz, amelyik alkotja.



ehetetlen piros kockák

ehető sárgászöld kockák

ehetetlen sárgászöld kisgolyók

Három másik ‘kisebb’ tartomány azon köröknek a tulajdonságaival bír, amelyekben van, és az ellentétével annak, amiben nincs.

Ezek a tartományok adnak otthont

az ehetetlen piros kisgolyóknak,

az ehető piros kockáknak,

az ehető sárgászöld kisgolyóknak.

1.5 Műveletek halmazokkal: unióképzés

A H és K halmazok **egyesített halmaz**ának (**unió**jának) nevezzük azt a halmazt, amelynek elemei a H és K halmazok közül legalább az egyiknek elemei.

Jele: $H \cup K$

$$\mathbf{H \cup K = \{x \mid x \in H \text{ vagy } x \in K\}}$$

Az **unióképzés tulajdonságai** (kommutatív, asszociatív, idempotens)

1.5 Műveletek halmazokkal: metszetképzés

A H és K **halmazok közös részé**nek (**metszet**ének) nevezzük azt a halmazt, amelynek elemei a H és K halmazok mindegyikében benne vannak.

Jele: $H \cap K$

$$\mathbf{H \cap K = \{x \mid x \in H \text{ és } x \in K\}.}$$

- A **metszetképzés tulajdonságai** (kommutatív, asszociatív, idempotens)
- **Diszjunkt halmazok**

Unió- és metszetképzés tuéajdonságai

$\forall\ H, K, L \subseteq U$

Abszorbciós tulajdonság:

$$\mathbf{H \cup (H \cap K) = H}$$
$$\mathbf{H \cap (H \cup K) = H}$$

Disztributivitás:

$$\mathbf{(H \cup K) \cap L = (H \cap L) \cup (K \cap L)}$$
$$\mathbf{(H \cap K) \cup L = (H \cup L) \cap (K \cup L)}$$

1.5 Műveletek halmazokkal: halmazok különbsége

A H és K **halmazok különbségé**n a H összes olyan elemének a halmazát értjük, amelyek nincsenek benne a K halmazban.

Jele: H \ K

$$\mathbf{H \setminus K = \{x \in H \mid x \notin K\}}$$

1.5 Műveletek halmazokkal: szimmetrikus különbség, komplementer

- A H és K halmazok **szimmetrikus differenciá**ja a

  $$\mathbf{H \,\Delta\, K = (H \setminus K) \cup (K \setminus H)}$$

- **Komplementer halmaz**: a H halmaznak az alaphalmazra vonatkozó komplementere (kiegészítő halmaza) az U \ H halmaz.

Jele: $\mathbf{H^C}$; $H^C = \{ x \in U \mid x \notin H \}$

$$\mathbf{H \setminus K = H \cap K^C}$$

Tetszőleges H, K, L $\subseteq$ U halmazra igazak

1.) $U^C = \emptyset$; $\emptyset^C = U$

2.) $(K^C)^C = K$

3.) $K \cup K^C = U$; $K \cap K^C = \emptyset$

4.) ha $H = K$, akkor $H^C = K^C$

5.) ha $H \subseteq K$, akkor $H^C \subseteq K^C$

6.) **De Morgan azonosságok:**

$$\mathbf{(H \cap K)^C = H^C \cup K^C}$$

$$\mathbf{(H \cup K)^C = H^C \cap K^C}$$

7.) $H \setminus K = \emptyset$ akkor és csakis akkor, ha $H \subseteq K$

Példa

Az alaphalmazunk legyen a Szabolcs megyei almatermelő vállalkozók halmaza. A H halmaz tartalmazza azokat a vállalkozókat, akik golden almát termelnek, a K halmaz azokat, akik jonatán almát termelnek.

a.) Mindkettőt termelik $H \cap K$

b.) Legalább az egyiket termelik $H \cup K$

c.) Nem termelnek jonatán almát K^C

d.) Nem termelnek sem jonatán, sem golden almát

$(H \cup K)^C$

e.) Legalább az egyik almát nem termelik $(H \cap K)^C$

f.) Pontosan az egyik fajta almát termelik

$(H \cup K) \setminus (H \cap K)$

Példa

Bizonyítsuk be, hogy

- $(H \cup K) \cap L = (H \cap L) \cup (K \cap L)$
- $H \setminus K = H \setminus (H \cap K)$
- $H \setminus (K \cup L) = (H \setminus K) \cap (H \setminus L)$
- $H \setminus (K \cap L) = (H \setminus K) \cup (H \setminus L)$

Nevezetes számhalmazok

2. SZÁMHALMAZOK

2.1 Természetes számok halmaza
2.2 Teljes indukció módszere
2.3 Egész számok halmaza
2.4 Racionális számok halmaza
2.5 Valós számok halmaza

2.1 Természetes számok halmaza

Az **N** = {1, 2, 3, 4, ...} halmazt a **természetes számok** halmazának nevezzük.

Ebben a halmazban **két művelet**et értelmezünk:

$\forall$ m, n $\in$ **N** esetén

(1) n + m $\in$ **N** és

(2) n x m $\in$ **N**

2.2 Teljes indukció módszere

Legyen az A(n) egy n természetes számtól függő állítás. Ha bebizonyítjuk, hogy

- A(1) igaz, és
- feltéve, hogy A(n) igaz valamely n-re, következik az, hogy A(n+1) is igaz (indukciós lépés)

akkor az állítás igaz minden n természetes számra.

2.2 Példa teljes indukcióra

Bizonyítsa be, hogy az első n természetes szám négyzetének összege:

$$\frac{n * (n + 1) * (2n + 1)}{6}$$

2.3 Egész számok halmaza

A **Z** = {...,-2,-1,0,1,2, ...} halmazt az **egész számok** halmazának nevezzük.

Ebben a halmazban **három művelet**et értelmezünk:

$\forall$ x,y $\in$ **Z** esetén

$$x + y \in \mathbf{Z}$$

$$x - y \in \mathbf{Z}$$

$$x * y \in \mathbf{Z}$$

2.4 Racionális számok halmaza

A **Q** = { p/q | p,q $\in$ **Z,** q $\neq$ 0} halmazt a **racionális számok** halmazának nevezzük.

Ebben a halmazban **négy művelet**et értelmezünk:

$\forall$ x,y $\in$ **Q** esetén

$$x + y \in \mathbf{Q}$$
$$x - y \in \mathbf{Q}$$
$$x * y \in \mathbf{Q}$$
$$x / y \in \mathbf{Q},\ y \neq 0$$

2.4 Racionális számok halmaza

A racionális szám tizedes tört alakja véges, vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört.

Tétel:

- Bármely véges, vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört felírható két egész szám hányadosaként.

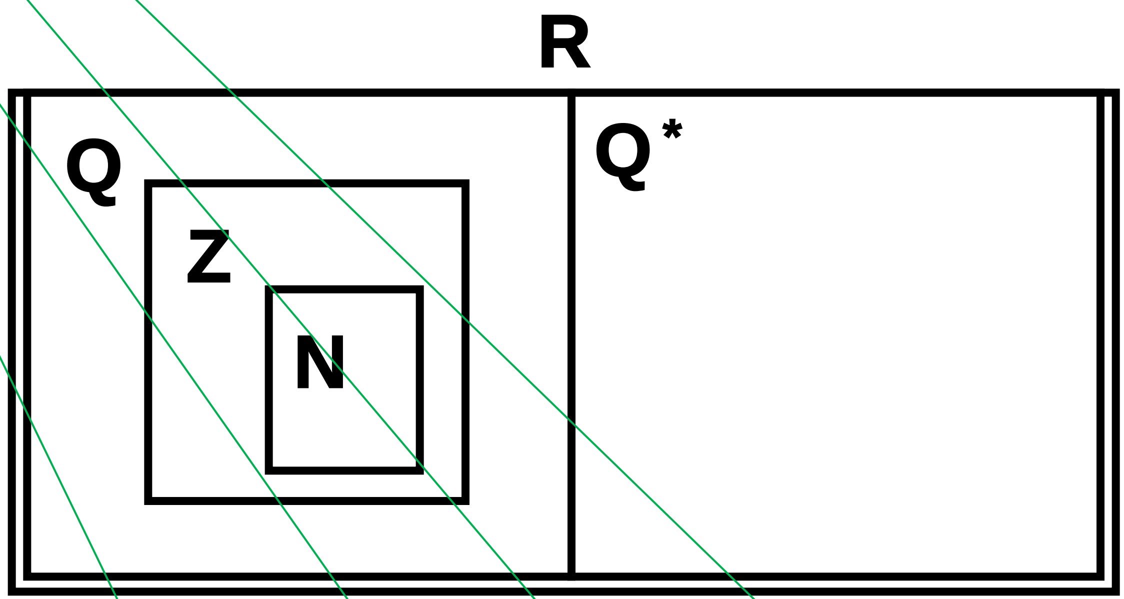
- Minden racionális szám felírható véges vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört alakban.

2.5 Valós számok halmaza

- Az olyan számokat, melynek tizedes tört kifejezése végtelen, de nem szakaszosan ismétlődő, **irracionális számok**nak mondjuk.

- A racionális és az irracionális számok halmazának unióját **valós számok** halmazának nevezzük és **R**-rel jelöljük.

T E R V



$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

2.5 Valós számok halmazán értelmezett műveletek

$\forall$ x,y $\in$ **R** esetén

$$x + y \in \mathbf{R}$$
$$x - y \in \mathbf{R}$$
$$x * y \in \mathbf{R}$$
$$x / y \in \mathbf{R},\ y \neq 0$$

2.5 Valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás tulajdonságai

$\forall$ x,y,z $\in$ **R** esetén

1.) **Kommutatív**: $x + y = y + x$

2.) **Asszociatív**: $x + (y + z) = (x + y) + z$

$x * (y * z) = (x * y) * z$

3.) **Disztributív**: $(x + y) * z = x * z + y * z$

4.) $\exists$ a **nulla elem**: $x + 0 = x$

5.) $\exists$ az **egység elem**: $x * 1 = x$

6.) $\exists$ a **negatív elem**: $x + (-x) = 0$

7.) $\exists$ a **reciprok elem** (x^{-1}); $x \neq 0$: $x * x^{-1} = 1$

2.5 Valós számok halmaza - definíciók

- A $H \subset \mathbf{R}$ **halmaz felülről korlátos,** ha $\exists\, l \in \mathbf{R}$ úgy, hogy az l elem minden H-beli halmaznál nagyobb, vagy egyenlő.

- A $H \subset \mathbf{R}$ **halmaz alulról korlátos,** ha $\exists\, l \in \mathbf{R}$ úgy, hogy az l elem minden H-beli halmaznál kisebb, vagy egyenlő.

- Ha egy halmaz alulról és felülről is **korlátos**, akkor korlátosnak nevezzük.

2.4 Valós számok halmaza - definíciók

- A $H \subset \mathbf{R}$ halmaz felülről korlátos, akkor H felső korlátainak legkisebbikét **pontos felső korlát**nak (supremum) nevezzük: **sup H**

- A $H \subset \mathbf{R}$ halmaz alulról korlátos, akkor a H alsó korlátainak legnagyobbikát **pontos alsó korlát**nak (infimum) nevezzük: **inf H**.

2.4 Valós számok halmaza - definíciók

- Ha a H felülről korlátos halmaznak van H-beli felső korlátja, akkor ezt a H **maximum**ának mondjuk: **max H.**
- Ha a H alulról korlátos halmaznak van H-beli alsó korlátja, akkor ezt a H **minimum**ának mondjuk: **min H**.

2.4 Valós számok halmaza – számegyenes, intervallum

- A valós számok és a számegyenes pontjai kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak, így a valós számokat **számegyenes**en szemléltethetjük.

- A számegyenesen két adott szám közé eső számok összességét **intervallum**nak nevezzük.

2.5 Valós számok halmaza – intervallum

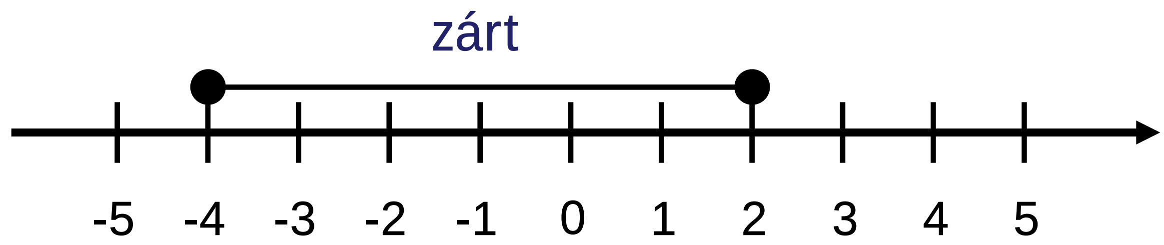
- Az $I \subseteq \mathbf{R}$ halmazt **intervallum**nak nevezzük, ha $\forall$ $x, y \in \mathbf{I}$ és $x \leq z \leq y$ esetén $z \subseteq \mathbf{I}$, azaz bármely két elemével együtt a köztük lévő elemeket is tartalmazza.

Jelölések:

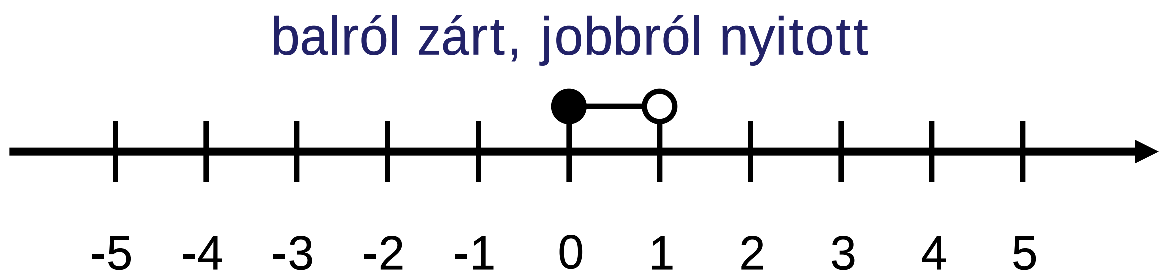
zárt	$[a,b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$
balról zárt	$[a,b[= \{ x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$
jobbról zárt	$]a,b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$
nyílt	$]a,b[= \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$

2.5 Valós számok halmaza – intervallum megadása

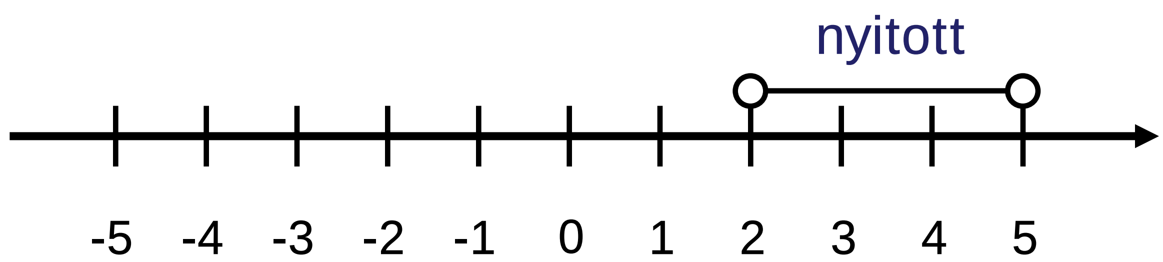
A = [-4, 2]



B = [0, 1[



C =]2, 5[



2.5 Valós számok kibővített számhalmaza

Az $\mathbf{R_b}$:= R $\cup$ {- ∞, + ∞} halmazt a **valós számok kibővített halmazá**nak nevezzük.

Ebben a halmazban - ∞ $<$ + ∞ és minden x $\in$ R-re teljesül, hogy - ∞ $<$ x $<$ + ∞.

A ∞ szimbólum nem számot jelöl, így esetében az algebrai szabályokat nem alkalmazhatjuk.

2.5 Műveletek $\pm\propto$ - nel

Legyen $x \in$ **R**. Ekkor

1.) $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$

$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$

$x / (+\infty) = x / (-\infty) = 0$

2.) ha $x > 0$, akkor

$x * (+\infty) = +\infty * x = +\infty$

$x * (-\infty) = -\infty * x = -\infty$

3.) ha $x < 0$, akkor

$x * (+\infty) = +\infty * x = -\infty$

$x * (-\infty) = -\infty * x = +\infty$

2.5 Műveletek $\pm\infty$ - nel

Legyen $x \in$ **R**. Ekkor

4.) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(+\infty) * (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $(-\infty) * (-\infty) = +\infty$

$-(+\infty) = -\infty$; $(+\infty) * (-\infty) = -\infty$

$-(-\infty) = +\infty$; $(-\infty) * (+\infty) = -\infty$

2.5 Amilyen műveletet nem végzünk $\pm\infty$-nel

1.) $(+\infty) + (-\infty)$
2.) $(-\infty) + (+\infty)$
3.) $0 * (+\infty)$
4.) $0 * (-\infty)$
5.) $(+\infty) / (+\infty)$
6.) $(+\infty) / (-\infty)$
7.) $(-\infty) / (+\infty)$
8.) $(-\infty) / (-\infty)$

Köszönöm a figyelmet!