

## 1 Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk halmazon?
2. Hogyan adhatunk meg egy halmazt?
3. Mikor mondjuk, hogy két halmaz egyenlő?
4. Legyen a  $H$  és  $K$  tetszőleges két halmaz. Mikor mondjuk, hogy a  $H$  halmaz részhalmaza a  $K$  halmaznak?
5. Mit értünk triviális részhalmazokon?
6. Definiálja a hatványhalmaz fogalmát.
7. Hogyan szemléltethetjük a halmazokat?
8. Mit értünk két vagy több halmaz egyesítésén és milyen tulajdonságokkal rendelkeznek?
9. Mit értünk két vagy több halmaz metszetén és milyen tulajdonságokkal rendelkeznek?
10. Mit értünk disztributivitáson az egyesítés és metszetképzés szempontjából?
11. Mikor mondjuk, hogy két vagy több halmaz diszjunkt?
12. Adjon meg diszjunkt halmazokat.
13. Mit értünk két halmaz különbségén, milyen tulajdonságokkal rendelkeznek?
14. Definiálja a komplementerhalmaz fogalmát, és adjon meg néhány, a komplementerre vonatkozó tulajdonságot.
15. Mit mondhatunk egy halmaz komplementerének komplementeréről?
16. Igaz-e minden halmazra, hogy  $((H \setminus K) \cup (K \setminus H)) \subset H \cup K$  ?
17. Milyen kapcsolat van a  $H$  és a  $K$  halmazok között, ha  $H \setminus K = \emptyset$  és  $H \cup K = H$ ?
18. Milyen kapcsolat van a  $H$  és a  $K$  halmazok között, ha  $H \setminus K = \emptyset$  és  $H \cap K = H$ ?
19. Milyen kapcsolat van a  $H$  és a  $K$  halmazok között, ha  $H \setminus K = \emptyset$  és  $K \setminus H = \emptyset$ ?
20. Venn-diagram segítségével döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások!
21.  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
22.  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
23. Mit értünk természetes számokon? Milyen műveleteket végezhetünk a természetes számok halmazán?
24. Mit értünk az egész számokon? Milyen műveleteket végezhetünk az egész számok halmazán?
25. Definiálja a racionális számok halmazát. Milyen műveleteket végezhetünk a racionális számok halmazában?
26. Mik azok az irracionális számok?
27. Definiálja a valós számok halmazát. Milyen alapműveleteket végezhetünk a valós számok halmazán?
28. Adja meg a valós számok halmazában értelmezett összeadás és szorzás tulajdonságait.
29. Legyen  $H$  egy valós részhalmaza a valós számok halmazának, Mikor nevezzük a  $H$  halmazt felülről, ill. alulról korlátosnak?
30. Definiálja a  $H$  halmazt (ha a  $H$  egy valós részhalmaza a valós számok halmazának) pontos alsó, ill. pontos felső korlátját.
31. Mit értünk egy  $H$  felülről korlátos halmaz maximumán?
32. Mit értünk egy  $H$  alulról korlátos halmaz minimumán?
33. Adja meg az intervallum fogalmát.

34. Hogyan kell intervallumot megrajzolni, majd számhalmaz formával megadni?
35. Döntse el az alábbi állításokról, hogy igaz vagy hamis-e?
- Bármely szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört felírható két egész szám hányadosaként.
  - A racionális számok végtelen tizedes tört alakban írhatók fel.
  - Ha a  $H (\subset \mathbb{R})$  alulról korlátos halmaz, akkor alsó korlátainak legkisebbikét pontos alsó korlátnak nevezzük.
  - Egy  $H$  halmaz maximuma pontosan akkor létezik, ha a  $H$  halmaz pontos felső korlátja a  $H$  halmazban van és ekkor  $\sup H = \max H$ .
  - Minden valós számnál van nagyobb természetes szám.

### 2 Példák

1. Legyen  $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x \leq 10\}$ . Valamint  $A = \{x \in H \mid x \text{ páros}\}$ ,

$B = \{x \in H \mid x \text{ prímszám}\}$  és  $C = \{x \in H \mid |x| < 5\}$ .

- Szemléltesse ezeket a halmazokat Venn diagramon!
- Határozza meg a következő halmazok elemeit:  
 $A - B$ ;  $(A \cup B) - C$ ;  $(A \cap C) \cup (B - C)$ ;  $\overline{(B - A) \cup C}$ .
- Írjon fel halmazműveletek segítségével 1, 2, 3, 4 és 5 elemű halmazokat!

*Megoldás:*

$$A - B = \{-6, -4, -2, 0, 4, 6, 8, 10\}; (A \cup B) - C = \{-6, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

$$(A \cap C) \cup (B - C) = \{-4, -2, 0, 2, 4, 5, 7\}; \overline{(B - A) \cup C} = \{-6, -5, 6, 8, 9, 10\}$$

$$1 = |A \cap B \cap C| = |(B \cap C) - A|; \quad 2 = |B - (A \cup C)| = |\overline{A \cup B \cup C}|; \quad 3 = |C - (A \cup B)|$$

$$4 = |A - (B \cup C)| = |(A \cap C) - B|; \quad 5 = |A \cap C|$$

2. Bizonyítsa be, hogy  $(H \cup K) \cap L = (H \cap L) \cup (K \cap L)$ .

*Megoldás:*

Legyen  $(H \cup K) \cap L = A$  és  $(H \cap L) \cup (K \cap L) = B$ . Ha belátjuk, hogy  $A \subseteq B$  és  $B \subseteq A$ , akkor igaz, hogy  $A = B$ .

(1) Először lássuk be, hogy  $A \subseteq B$ .

Tegyük fel, hogy  $x \in (H \cup K) \cap L$ . Ez azt jelenti, hogy  $x \in (H \cup K)$  és  $x \in L$ , vagyis  $x \in H$  vagy  $x \in K$ , és  $x \in L$ . Ha  $x \in H$  és  $x \in L$ , akkor  $x \in (H \cap L)$ .

Ha  $x \in K$  és  $x \in L$ , akkor  $x \in (K \cap L)$ . Így  $x \in (H \cap L)$  vagy  $x \in (K \cap L)$ , azaz  $x \in (H \cap L) \cup (K \cap L)$ .

Ebből következik, hogy  $(H \cup K) \cap L \subseteq (H \cap L) \cup (K \cap L)$ .

(2) Most lássuk be, hogy  $B \subseteq A$ .

Legyen most  $x \in (H \cap L) \cup (K \cap L)$ . Ez azt jelenti, hogy  $x \in (H \cap L)$ , vagy  $x \in (K \cap L)$ . Ha  $x \in (H \cap L)$ , akkor  $x \in H$  és  $x \in L$ . Ha  $x \in (K \cap L)$ , akkor  $x \in K$  és  $x \in L$ . Ennélfogva  $x \in H$  vagy  $x \in K$ , és  $x \in L$ . Így  $x \in (H \cup K)$  és  $x \in L$ , azaz  $x \in (H \cup K) \cap L$ , így beláttuk, hogy  $(H \cap L) \cup (K \cap L) \subseteq (H \cup K) \cap L$ .

Tehát a két halmaz egyenlő.

3. Legyen adott az  $U$  alaphalmaz és legyen  $H, K, L \subseteq U$ . Bizonyítsa be, hogy az (1), (2) és (3) egyenlőségek fennállnak.

$$(1) H \setminus K = H \setminus (H \cap K)$$

$$(2) H \setminus (K \cup L) = (H \setminus K) \cap (H \setminus L)$$

$$(3) H \setminus (K \cap L) = (H \setminus K) \cup (H \setminus L)$$

*Megoldás:*

$$(1) H \setminus (H \cap K) = H \cap (H \cap K)^c = H \cap (H^c \cup K^c) =$$

$$= (H \cap H^c) \cup (H \cap K^c) = \emptyset \cup (H \cap K^c) = H \cap K^c = H \setminus K;$$

$$(2) (H \setminus K) \cap (H \setminus L) = (H \cap K^c) \cap (H \cap L^c) = (H \cap K^c \cap H) \cap L^c =$$

$$(H \cap K^c) \cap L^c = H \cap (K^c \cap L^c) = H \cap (K \cup L)^c = H \setminus (K \cup L);$$

$$(3) H \setminus (K \cap L) = H \cap (K \cap L)^c = H \cap (K^c \cup L^c) = (H \cap K^c) \cup (H \cap L^c) =$$

$$(H \setminus K) \cup (H \setminus L).$$

### 3 Gyakorló feladatok

#### 3.1 Halmazok definíciója, megadása

1. A következő definíciók közül melyek határoznak meg egyértelműen egy-egy halmazt?

a)  $A := \{a \text{ csoport tanulói}\}$

b)  $B := \{Magyarország városai ma\}$

c)  $C := \{Pilinszky János versei\}$

d)  $D := \{a \text{ természetes számok}\}$

e)  $E := \{a \text{ természetes számok halmaza}\}$

f)  $F := \{az \ x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ egyenlet valós gyökei}\}$

g)  $G := \{az \ x^2 + 1 = 0 \text{ egyenlet valós gyökei}\}$

h)  $H := \{a \text{ prímszámok}\}$

i)  $I := \{a \text{ legnagyobb prímszám}\}$

j)  $J := \{\text{néhány prímszám}\}$

2. Adja meg a következő halmazok elemeit!

a)  $A := \{a \text{ } 100\text{-nál kisebb négyzetszámok}\}$

b)  $B := \{a \text{ } 10\text{-nél kisebb négyzetszámok}\}$

c)  $C := \left\{ az \ \frac{x-1}{x} = 2 \text{ egyenlet pozitív gyökei} \right\}$

d)  $D := \left\{ az \ \frac{x-1}{x} = 2 \text{ egyenlet pozitív gyökeinek a száma} \right\}$

e)  $E := \{az \ x^2 - 2x \leq 0 \text{ egyenlőtlenség egész gyökei}\}$

- f)  $F := \{a \text{ háromjegyű páratlan számok halmaza}\}$   
 g)  $G := \{729 \text{ pozitív osztói}\}$   
 h)  $H := \{Az \ |x-3| \leq 4 \text{ egyenlőség pozitív egész megoldásai}\}$   
 i)  $I := \left\{Az \ \frac{x-3}{x+4} \geq 0 \text{ egyenlőség egész megoldásai}\right\}$   
 j)  $J := \left\{Az \ \frac{x^2-5x+6}{x+1} \leq 0 \text{ egyenlőség egész megoldásai}\right\}$

3. Válasszuk ki a következő halmazok közül az egyenlőket!

- a)  $A := \{a \text{ legkisebb prímszám}\}$   
 b)  $B := \{\text{egy prímszám pozitív osztóinak száma}\}$   
 c)  $C := \{az \ x^3 - 2x^2 = 0 \text{ egyenlet valós gyökei}\}$   
 d)  $D := \{az \ x^3 - 2x^2 = 0 \text{ egyenlet valós gyökeinek a száma}\}$   
 e)  $E := \{a \ (0,2) \text{ számpár}\}$   
 f)  $F := \{a - 1 \text{ és } 3 \text{ közé eső páros számok}\}$   
 g)  $G := \{az \ x^{100} = 1 \text{ egyenlet valós gyökei}\}$   
 h)  $H := \{az \ x = 0 \text{ és } y = 2 \text{ egyenletű egyenesek metszéspontjainak koordinátái}\}$

### 3.2 Venn-diagram

1. Igazolja az  $X$  alaphalmaz  $A, B, C$  részhalmazaira az alábbi egyenlőségeket Venn-diagram segítségével.

- a)  $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$   
 b)  $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$   
 c)  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$   
 d)  $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$   
 e)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$   
 f)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$   
 g)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$   
 h)  $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$   
 i)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

2. Legyen  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  és  $B = \{8 \text{ -nál nem nagyobb pozitív páros számok}\}$ . Szemléltesse a halmazokat Venn-diagramon! Határozza meg az  $A \cap B, B \setminus A$  halmazokat!

3. Legyen  $A := \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  és  $B := \{a \ 8 \text{ -nál nem nagyobb pozitív páros számok}\}$ . Szemléltesse a halmazokat Venn-diagramon! Határozza meg az  $A \cap B, B \setminus A$  halmazok elemit!

### 3.3 Műveletek halmazokkal

- Alaphalmazunk legyen a H-B. megyei mezőgazdasági vállalkozók halmaza. Az  $A$  halmaz tartalmazza azokat a fenti halmazból, akiknek van traktoruk, a  $B$  halmaz tartalmazza azokat a fenti halmazból, akiknek van kombájruk. Írja fel halmazelméleti műveletekkel azon vállalkozók halmazát, akik
  - mindkettővel rendelkeznek,
  - legalább az egyikkel,
  - nincs traktoruk,
  - egyikkel sem rendelkeznek,
  - csak traktorral nem rendelkeznek,
  - legalább egyikkel nem rendelkeznek,
  - pontosan egyikkel rendelkeznek.
- Legyenek az  $A$  halmaz elemei 16 pozitív osztói, a  $B$  halmaz elemei 24 pozitív osztói, a  $C$  halmaz elemei 12 pozitív osztói. Határozzuk meg az  $A \cup B$ ,  $B \cup C$ ,  $C \cup A$  halmazokat. Lesz-e a kapott halmazok között két egyenlő halmaz?
- Adjon meg az  $A = \{10, 20, 30\}$  halmazhoz olyan  $B, C$  és  $D$  halmazt, hogy az alábbi összefüggések igazak legyenek!  $A \cup B = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ ,  $A \cap C = \{20\}$ ,  $A \setminus D = \emptyset$ .
- Legyen  $A = \{\text{tíznel kisebb pozitív egész számok}\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 16, 17, 18, 19, 20\}$  és  $C = \{1, 3, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20\}$ . Határozza meg az alábbi halmazok elemeit:  $A \cap B$ ,  $B \setminus (A \cup C)$ ,  $(A \cap C) \setminus B$ ,  $A \setminus C$ !
- Az  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  halmaz  $A, B$  és  $C$  részhalmazairól az alábbiakat tudjuk:  $A \cap B = \{2\}$ ,  $(A \cup B) \cap C = \{5, 6\}$ ,  $A \setminus C = \{2, 3, 4\}$ ,  $C \setminus B = \{1, 5\}$ . Határozza meg az  $A, B$  és  $C$  halmazokat!
- Legyen az  $A$  a budapesti házaspárok,  $B$  a budapesti nős férfiak,  $C$  a budapesti férjzett nők halmaza. Állapítsa meg, hogy igazak-e a következő állítások?
 
$$B \subset A$$

$$B \cup C = A$$
- Határozza meg az  $A = \{\text{nullára végződő egész számok}\}$  és  $B = \{5\text{-tel osztható egész számok}\}$  halmazok különbségét!
- Legyen az alaphalmaz  $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 25\}$ . Legyen továbbá adottak a következő halmazok:  $A = \{x \in H \mid x \text{ páros}\}$ ,  $B = \{x \in H \mid x \text{ egyjegyű szám}\}$ ,  $C = \{x \in H \mid 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Határozza meg az  $(A \cap B) \setminus C$ ,  $(A \cup B) \cap (\overline{A \setminus C})$ ,  $(\overline{C \cup B})$  halmazok elemeit és számosságát!

9. Legyen az alaphalmaz  $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 10\}$ . Legyenek továbbá adottak a következő halmazok:
- $$A = \{x \in H \mid \text{negatív számok}\}, \quad B = \{x \in H \mid \text{páros számok}\},$$
- $$C = \{x \in H \mid 4\text{-gyel osztható számok}\}.$$

- Határozza meg a  $B \setminus C$ ,  $\overline{A \cap C}$ ,  $\overline{A \cup B \cup C}$  halmazokat!
- Határozza meg az a)-ban megadott halmazok számosságát!
- Írjon fel a  $H$ -nak olyan részhalmazait, melyek egyenlő számosságúak!
- Határozza meg a  $B \cap C$  és  $B \cup C$  halmazokat!

10. A megadott halmazokkal végezze el a kijelölt műveleteket!

- $X = \{\text{az egyetem I. évf. általános agrárménök hallgatói}\}$   
 $A = \{\text{az évfolyam 18 fős 1. csoportja}\}$   
 $B = \{\text{az évfolyam 18 fős 2. csoportja}\}$   
 $C = \{\text{az 1. csoport 15 fő fiú hallgatója}\}$   
 $A \cup B, B \cap C, A \setminus C, \overline{B}, \overline{C}$

- $X = \mathbb{N}$   
 $A = \{\text{prímszámok}\}$   
 $B = \{\text{pozitív párosak}\}$   
 $C = \{a^2 \text{ pozitív egész kitevőjű hatványai}\}$   
 $\overline{A}, B \cup C, C \setminus A, C \cap \overline{A}, A \cap B$

- $X = \mathbb{Z}$   
 $A = \{a \mid a \text{ osztható } 5\text{-tel}\}$   
 $B = \{b \mid b \text{ páros}\}$   
 $C = \{c \mid c \text{ negatív páratlan}\}$   
 $D = \{-5, -10, -15\}$   
 $C \cap \overline{A}, A \cap \overline{B}, B \cup D$

- $X = \mathbb{Z}$   
 $A = \{a \mid a \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$   
 $B = \{b \mid b \text{ osztható } 5\text{-tel}\}$   
 $C = \{c \mid c \text{ prím}\}$   
 $D = \{15, 30, 45, 90\}$   
 $C \cap \overline{A}, A \setminus B, B \cap D, (\overline{A} \cap C) \cup D$

11. Állapítsa meg, hogy az  $XY$  sík mely pontjaival szemléltethetők a következő halmazok?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - y^4 = 0\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 4\}$$

12. Az  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$  és  $B = \{a \text{ 8-nál nem nagyobb nem negatív páros számok}\}$  halmazokkal végezze el az alábbi műveleteket:  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ .

13. Legyen az alaphalmaz a  $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < 13\}$  és az ezen értelmezett  $A, B$  és  $C$  halmazok az alábbiak:

$$A = \{-3, -2, 0, 3, 5, 9\}$$

$$B = \{x \in H \mid x \text{ osztható 3-mal}\}$$

$$C = \{x \in H \mid |x| < 3\}$$

- Készítsen Venn-diagramot a halmazokról!
- Határozza meg az  $(A \cup C) \setminus B$  és  $\overline{B \cup C}$  halmazok elemeit és számosságát!
- Műveleti jelek felhasználásával írja fel a  $H$  halmaznak olyan részhalmazait, melynek számossága 4.

14. Legyen adott az  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 4 \leq 0\}$  és  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x - 1 \leq 0\}$  halmaz. Határozza meg az  $A \cup B$  és  $A \cap B$  halmazokat!

15. Legyenek az  $A, B, C$  halmaz elemei az alábbi gyümölcsnevek betűinek a karakterei.

$$A = \{ALMA\}, B = \{BANÁN\}, C = \{CITROM\}.$$

- Határozza meg az  $A, B, C$  halmazok számosságát!
- Határozza meg az  $(A \cup B) \setminus C$  halmaz elemeit!
- Az elemek felsorolásával írja fel a  $B \setminus A$  halmaz összes részhalmazát!

16. Határozza meg az  $A \cap B$  halmazt, ha  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \leq 4x - 6\}$  és  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4x - 11 \leq 2x + 11\}$ !

17. Az  $A$  halmaz legyen a  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$  koordinátpontokkal adott négyszöglet pontjainak a halmaza, a  $B$  pont-halmaz legyen  $(0,0), (1,1), (0,2)$  koordinátájú csúcsok által meghatározott háromszöglet pontjainak a halmaza, a  $C$  halmaz pedig legyen a  $(0,-1), (1,0), (0,1)$  csúcsokkal adott háromszöglet pontjainak a halmaza. Milyen alakzatot határoznak meg az  $A \cup B, B \cup C, C \cup A$  és  $(A \cup B) \cup C$  halmazok?

18. Legyen  $A$  a 2-vel osztható kétjegyű számok halmaza,  $B$  a 3-mal osztható 100-nál kisebb pozitív számok halmaza,  $C$  pedig a 30-cal osztható egész számok halmaza. Határozza meg az  $A$  és  $B, B$  és  $C, C$  és  $A$  halmaz közös részét!

19. Jelölje  $(x, y)$ -nal a koordinátasík tetszőleges pontjának koordinátáit. Legyen  $A$ ,  $B$  és  $C$  rendre az olyan  $(x, y)$  koordinátákkal rendelkező pontok halmaza, amelyekre  $|x + y| \leq 1$ ,  $|x - y| \leq 1$  ill.  $|y| \leq \frac{1}{2}$ . A sík milyen tartományait határozzák meg az  $A \cap B$  és  $(A \cap B) \cap C$  halmazok?

20. Legyen  $D = \left\{ (x, y) \in S \mid x \in R, y \in R \text{ és } |x| \leq \frac{1}{2} \right\}$ . Az előbbi feladat feltételeit használva határozza meg az  $(A \cap B) \cap (C \cap D)$  halmazt.

21. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a  $P(x, y)$  pontoknak a halmazát, amelyekre:

- $|x| + |y| = 1$
- $|x| + |y| > 1$
- $|x| + |y| + |x + y| = 2$
- $x^2 + y^2 < 4$
- $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 16$

22. Az  $A$  és  $B$  halmazokról tudjuk, hogy  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A \setminus B = \{2, 4, 6\}$ ,  $A \cap B = \{1, 3\}$ . Határozza meg az  $A$  és  $B$  halmazt!

23. Egy irodaházban három légkondicionáló működik. Jelölje az  $A$  halmaz azokat a napokat, amikor az első működik, jelölje  $B$  azokat a napokat, amikor a 2. működik és  $C$ -vel jelöljük azokat a napokat, amikor a 3. működik. Fogalmazzuk meg, hogy milyen napokat jelölnek a következő halmazok:

- $A \cap B \cap C$ ,
- $A \cup B \cup C$ ,
- $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ ,
- $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ ,
- $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ ,
- $\overline{C}$ .

24. Hány elemű az alábbi két halmaz uniója ill. metszete?

$$A = \{7\text{-tel osztható kétjegyű számok}\}$$

$$B = \{3\text{-mal osztható kétjegyű számok}\}$$



### 3.4 Részhalmaz

1. Írja fel az  $\{1,2,3\}$  halmazok összes részalmazát!

2. Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0, x \leq 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ 2-vel osztható egész szám}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 6k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{x-4} > 0\right\}$$

Állapítsa meg, hogy  $A, B, C$  és  $D$  halmazok közül melyik részalmeza  $\mathbb{N}$ -nek és melyik nem!

3. Igazolja, hogy egy 53 elemű halmaznak ugyanannyi 16 elemű részalmeza van, mint ahány 37 elemű.

4. Hány elemű az a halmaz, amelynek legalább 1000-rel több részalmeza van, mint eleme?

5. Hányszor annyi 3 elemű részalmeza van egy 10 elemű halmaznak, mint ahány 2 elemű?

### 3.5 Bizonyítások

1. Bizonyítsa be, hogy  $A \subset B$  esetén  $A \cup B = B$ !

2. Bizonyítsa be a két halmaz egyenlőségét!

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

a)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b)  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

c)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

d)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

e)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

### 3.6 Nevezetes számhalmazok

1. Legyen  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páros}\}$ ,  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$ ,  $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}$ . Állapítsa meg, hogy mik lesznek az  $X = [A \setminus (B \cap C)] \cup [(A \setminus B) \setminus C]$  halmaz elemei?

2. Tekintsük a nevezetes számhalmazokat a szokásos jelölésükkel. Adjuk meg a következő halmazokat:  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$ ,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^*$ ,  $\overline{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^*}$ .

3. Legyen az alaphalmaz a természetes számok halmaza. Adottak a következő halmazok:  
 $A := \{\text{páros számok}\}$ ,  $B := \{\text{páratlan számok}\}$ . Adja meg a következő halmazok elemeit:

a)  $\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ ,

b)  $\overline{(A \setminus B)} \cup [(\overline{A} \cap B) \setminus (A \cup \overline{B})]$ ,

c)  $\overline{(A \setminus (B \cup \overline{A}))} \cap (\overline{A} \cup B)$ .

### 3.7 Teljes indukció

1.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{n \cdot (n+1)}$

2.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

3.  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

4.  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{1}{4} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$

5. Bizonyítsa be, hogy  $n^3 + 5n$  osztható 6-tal bármilyen természetes szám is az  $n$ .

6. Bizonyítsa be, hogy az  $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$  osztható 8-cal, ha  $n$  természetes szám.