

# Függvények határértéke és folytonossága

Dr. Vincze Szilvia

# 9. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE, FOLYTONOSSÁGA

## 9.1 Függvény határértéke véges $x_0$ helyen

9.1.1 Bal- és jobboldali határérték

9.1.2 Határértékre vonatkozó műveletek

## 9.2 Függvény határértéke végtelenben

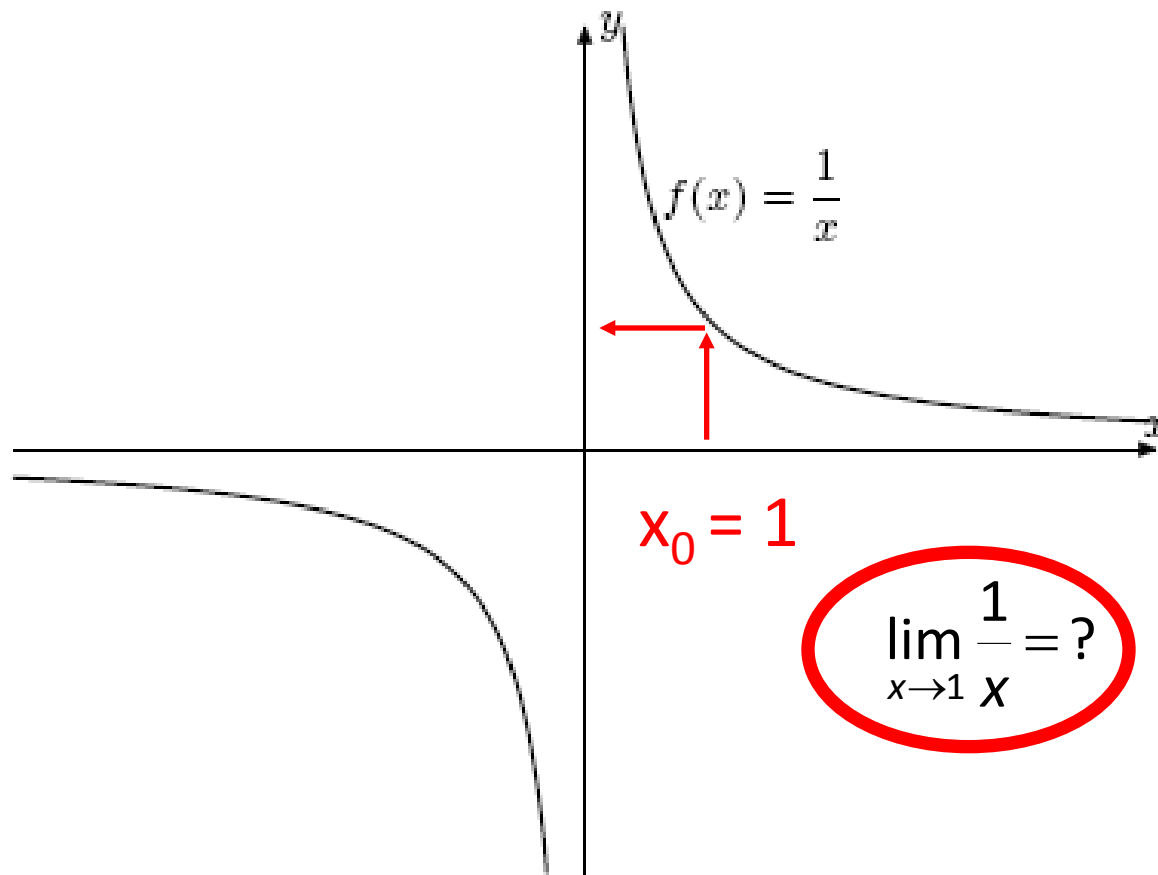
## 9.3 Nevezetes határértékek

## 9.4 Függvények folytonossága

## 9.5 Bal- és jobboldali folytonosság

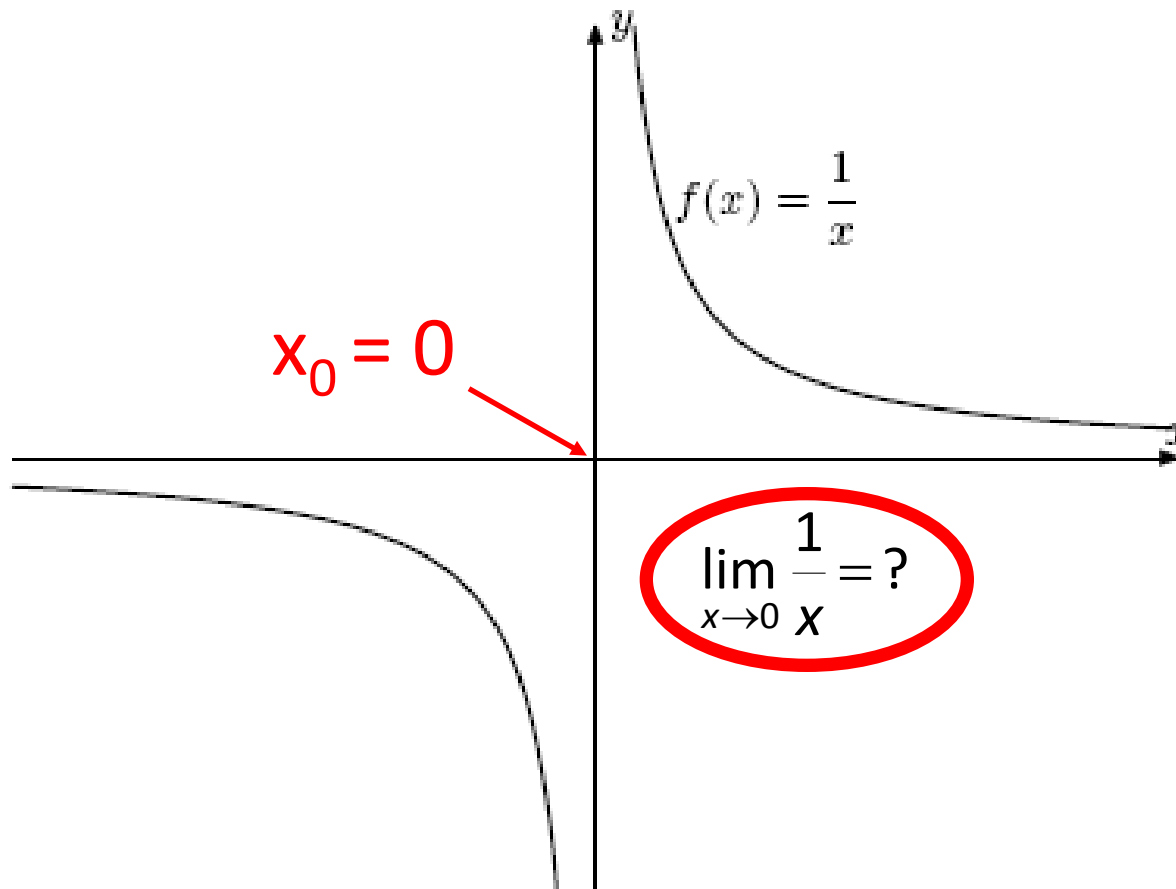
# Példa

Ábrázoljuk az  $f(x) = 1/x$  függvényt!



függvény határértéke véges  $x_0$  helyen  
( $x_0$ -ban a függvény értelmezve van)

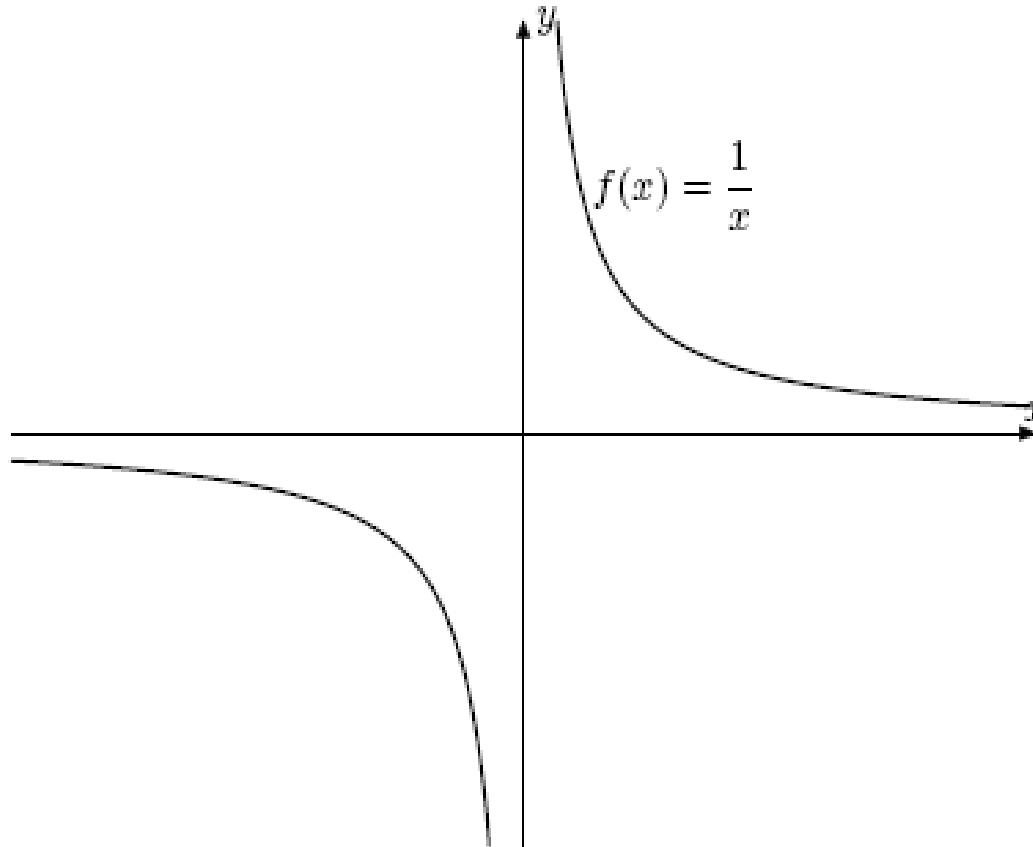
# Példa



függvény határértéke véges  $x_0$  helyen  
( $x_0$ -ban a függvény nincs értelmezve)

# Példa

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = ?$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = ?$$

függvény határértéke  $\pm \infty$ -ben

# Bevezető gondolatok

- A számegyenesen bármely  $x_0$  ponthoz meg tudunk adni hozzá konvergáló, valós számokból álló sorozatot. Az  $x_0$  lehet egy függvény értelmezési tartományának eleme is.
- Tekintsük az  $f(x) = 2x+1$  függvényt. Az  $x_0=3$  pontjához adjunk meg olyan sorozatokat, melyek a 3-hoz konvergálnak!
- Bármely számhoz végtelen sok, hozzá konvergáló sorozat adható meg, legegyszerűbben úgy, hogy az illető számhoz egy nullsorozatot adunk.

# Bevezető gondolatok

Ha a függvény az  $x_0$  környezetében mindenhol értelmezve van, akkor az  $x_0$ -hoz tartó  $(x_n)$  sorozat egyes értékeihez tartozó függvényértékek is sorozatot alkotnak.

$$\mathbf{f(x) = 2x + 1 ; x_0 = 3; pl.: x_n = 3 + 1/n}$$

# Példa

$$\underbrace{x_n = 3 + \frac{1}{n}}$$

$$\underbrace{f(x_n) = 2x_n + 1 = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1}$$

<b>n</b>	<b><math>x_n</math></b>	<b><math>f(x_n)</math></b>



# Példa

$$\underbrace{x_n = 3 + \frac{1}{n}}$$

$$\underbrace{f(x_n) = 2x_n + 1 = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1}$$

<b>n</b>	<b><math>x_n</math></b>	<b><math>f(x_n)</math></b>
$n = 1$	$x_1 = 3 + 1/1 = 4$	$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

# Példa

$$\underbrace{x_n = 3 + \frac{1}{n}}$$

$$\underbrace{f(x_n) = 2x_n + 1 = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1}$$

<b>n</b>	<b><math>x_n</math></b>	<b><math>f(x_n)</math></b>
$n = 1$	$x_1 = 3 + 1/1 = 4$	$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$
$n = 2$	$x_2 = 3 + 1/2 = 7/2$	$f(7/2) = 2 \cdot 7/2 + 1 = 8$

# Példa

$$\underbrace{x_n = 3 + \frac{1}{n}}$$

$$\underbrace{f(x_n) = 2x_n + 1 = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) + 1}$$

<b>n</b>	<b><math>x_n</math></b>	<b><math>f(x_n)</math></b>
$n = 1$	$x_1 = 3 + 1/1 = 4$	$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$
$n = 2$	$x_2 = 3 + 1/2 = 7/2$	$f(7/2) = 2 \cdot 7/2 + 1 = 8$
$n = 3$	$x_3 = 3 + 1/3 = 10/3$	$f(10/3) = 2 \cdot 10/3 + 1 = 25/3$

# Példa

<b>n</b>	<b><math>x_n</math></b>	<b><math>f(x_n)</math></b>
$n = 1$	$x_1 = 3 + 1/1 = 4$	$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$
$n = 2$	$x_2 = 3 + 1/2 = 7/2$	$f(7/2) = 2 \cdot 7/2 + 1 = 8$
$n = 3$	$x_3 = 3 + 1/3 = 10/3$	$f(10/3) = 2 \cdot 10/3 + 1 = 25/3$
$n = 4$	$x_4 = 3 + 1/4 = 13/4$	$f(13/4) = 2 \cdot 13/4 + 1 = 15/2$

$$x_n = 3 + \frac{1}{n}$$

$$f(x_n) = 2 \cdot x_n + 1$$

# Példa

$n$	$x_n$	$f(x_n)$
$n = 1$	$x_1 = 3 + 1/1 = 4$	$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$
$n = 2$	$x_2 = 3 + 1/2 = 7/2$	$f(7/2) = 2 \cdot 7/2 + 1 = 8$
$n = 3$	$x_3 = 3 + 1/3 = 10/3$	$f(10/3) = 2 \cdot 10/3 + 1 = 25/3$
$n = 4$	$x_4 = 3 + 1/4 = 13/4$	$f(13/4) = 2 \cdot 13/4 + 1 = 15/2$
	$x_n = 3 + \frac{1}{n}$	$f(x_n) = 2 \cdot x_n + 1$

$$(x_n) = \left( 4; \frac{7}{2}; \frac{10}{3}; \frac{13}{4}; \dots \right)$$

$$f(x_n) = \left( 2 \cdot \left( 3 + \frac{1}{n} \right) + 1 \right)$$

# Példa

$$x_n = 3 + \frac{1}{n}$$

$$\lim (x_n) = \lim \left( 3 + \frac{1}{n} \right) = 3$$

$$f(x_n) = \left( 2 \cdot \left( 3 + \frac{1}{n} \right) + 1 \right)$$

$$\lim f(x_n) = \lim \left( 7 + \frac{2}{n} \right) = 7$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$$

## 9.1 Függvény határértéke véges $x_0$ helyen

Az  $f$  **függvénynek** az  **$x_0$  helyen** **határértéke az  $A$** , ha minden  $(x_n) \rightarrow x_0$  esetén  $(f(x_n)) \rightarrow A$ .

Feltétel, hogy a függvény az  $x_0$  környezetében értelmezve legyen.

A függvény határértékének jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

- A definícióban szereplő  $(x_n)$  sorozatnak tetszőlegesnek kell lennie, azaz az  $x_0$ -hoz a sorozat nemcsak jobbról vagy balról konvergálhat, hanem egyszerre mindkét oldalról is.
- Ha a bal és a jobboldali határértékek megegyeznek, akkor a függvénynek van határértéke az  $x_0$  helyen.



# Példa

Adjunk meg az  $f(x) = 2x+1$  függvény esetén az  $x_0=3$  ponthoz balról és jobbról konvergáló sorozatokat!

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 1) = ?$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 1) = ?$$



bal oldali határérték    jobb oldali határérték

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

bal oldali határérték = jobb oldali határérték

Ha a bal és a jobboldali határértékek megegyeznek, akkor a függvénynek van határértéke az  $x_0$  helyen.

## 9.1.1 Bal- és jobboldali határérték

Ha az  $x_0$ -hoz minden balról konvergáló  $(x_n)$  sorozat esetén (ekkor a sorozat minden tagjára:  $x_n < x_0$ ) a függvényértékek sorozata tart  $A_b$ -hez, akkor  $A_b$  **bal oldali határérték**.

$$\lim_{x_0-0} f(x) = A_b$$

A **jobb oldali határérték** fogalma a fentiekkel teljesen analóg.

$$\lim_{x_0+0} f(x) = A_j$$

## 9.1.2 Határértékre vonatkozó műveletek

A **határértékképzés művelettartó**, azaz ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \pm \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) / g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) / \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) = \frac{A}{B}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \cdot A; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

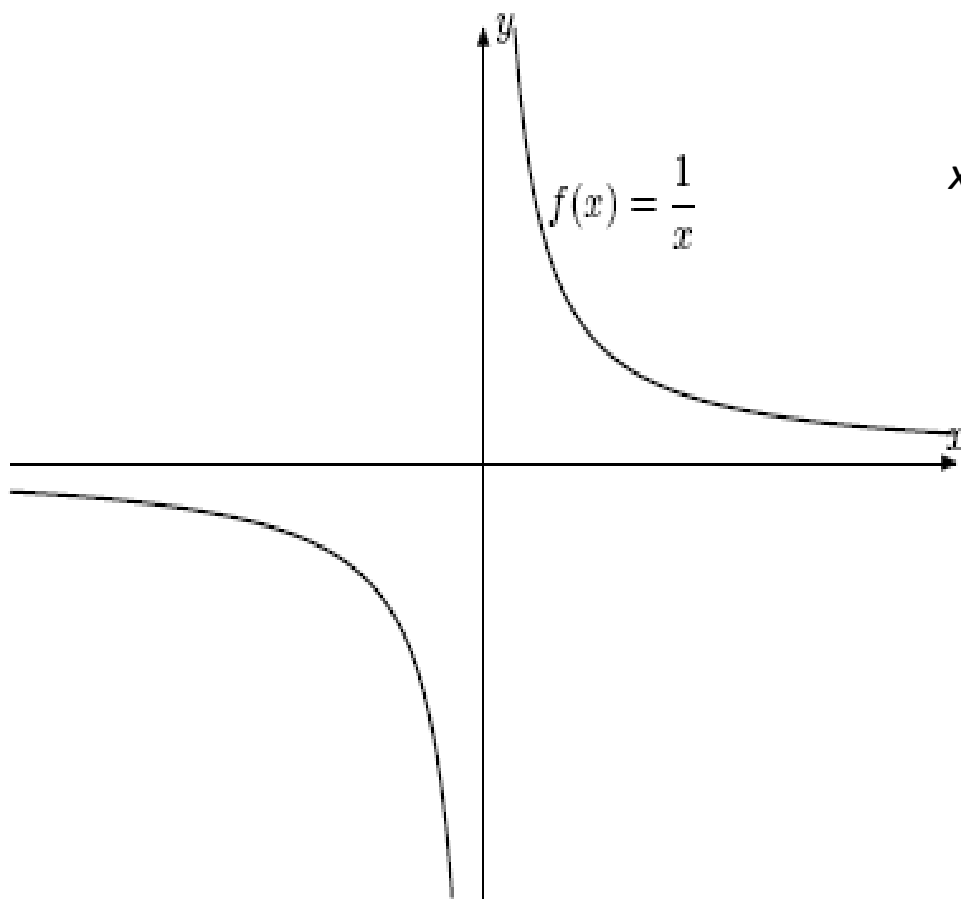
# Megjegyzés

- Ha a függvény az  $x_0$  helyen értelmezve van, akkor a határértéke megegyezik a helyettesítési értékével.
- Ha a függvény az  $x_0$  helyen nincs értelmezve, akkor jobb és baloldali határértéket kell számítanunk!

# Példa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0 - \frac{1}{n}} \left( \frac{1}{x} \right) = ?; \quad \lim_{x \rightarrow 0 + \frac{1}{n}} \left( \frac{1}{x} \right) = ?$$



## 9.2 Függvény határértéke + végtelenben

Legyen  $D \subseteq \mathbf{R}$  felülről nem korlátos halmaz,  
 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  adott függvény továbbá  $x_n \in D$  olyan sorozat, amelyre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

Ha az  $(f(x_n))$  sorozat minden ilyen tulajdonságú  $(x_n)$  sorozat esetén konvergens és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

akkor azt mondjuk, hogy az  **$f$  függvénynek létezik a határértéke a végtelenben** és ez  $A$ -val egyenlő:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

## 9.2 Függvény határértéke - végtelenben

Legyen  $D \subseteq \mathbf{R}$  alulról nem korlátos halmaz,

$f: D \rightarrow \mathbf{R}$  adott függvény továbbá  $x_n \in D$  olyan sorozat, amelyre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

Ha az  $(f(x_n))$  sorozat minden ilyen tulajdonságú  $(x_n)$  sorozat esetén konvergens és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

akkor azt mondjuk, hogy az  **$f$  függvénynek létezik a határértéke a mínusz végtelenben** és ez  $A$ -val egyenlő:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$



## 9.3 Nevezetes határértékek

A „sorozat-analóg” határértékek:

$$1.) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$$

$$2.) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$3.) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$4.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq a < 1 \\ 1, & \text{ha } a = 1 \\ \infty, & \text{ha } a > 1 \end{cases}$$

## 9.3 Nevezetes határértékek

$$5.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{1} = \ln a \quad (a > 0 \text{ és } a \text{ állandó})$$

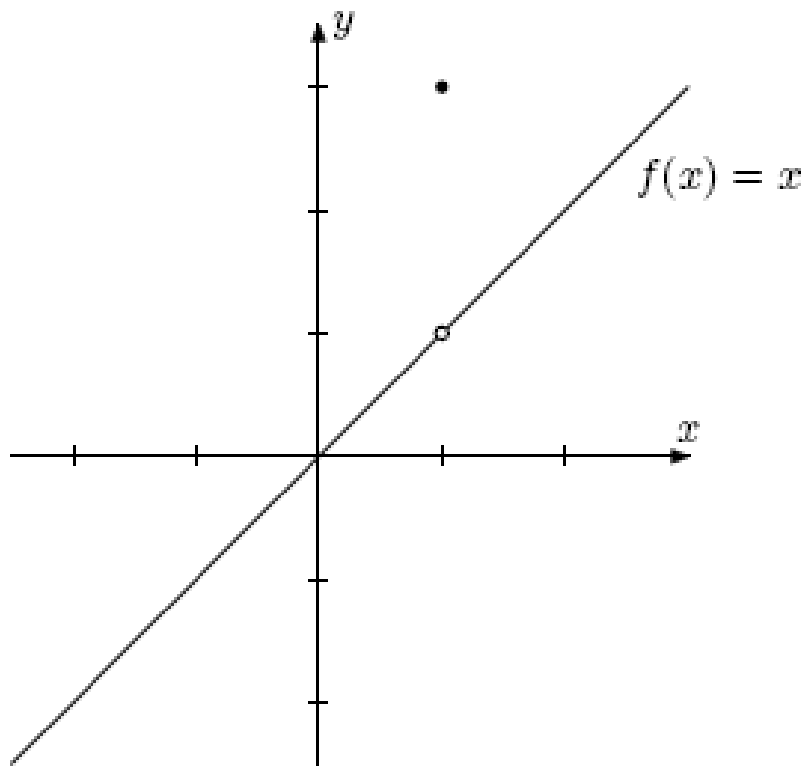
$$6.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$7.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$8.) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

## 9.4 Függvények folytonossága

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \neq 1 \\ 3 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$



A folytonosság téveszméje: a függvény grafikonját a ceruza felemelése, áthelyezése nélkül nem tudtam „megrajzolni”!

**A függvény folytonossága pontbeli tulajdonság.**

## Példa

Az  $f(x) = 1$  ( $x$  racionális szám) függvény esetén, a függvényértékek „végtelenül közel” vannak egymáshoz, hiszen bármely racionális számhoz végtelenül közel végtelen sok racionális szám van. Ugyanakkor minden  $(x, f(x))$  függvénypont között „lyuk” van, mert bármely két racionális szám között van irracionális szám, tehát a definiált pontok nem köthetőek össze.

## 9.4 Függvények folytonossága

Az  **$f$  függvény folytonos egy  $x_0$  pontban**, ha egyszerre eleget tesz a következő három feltételnek:

- a függvényt értelmezzük az  $x_0$  pontban és annak környezetében (azaz van helyettesítési érték);
- van határértéke a függvénynek az  $x_0$  pontban;
- a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

## 9.5 Bal- és jobboldali folytonosság

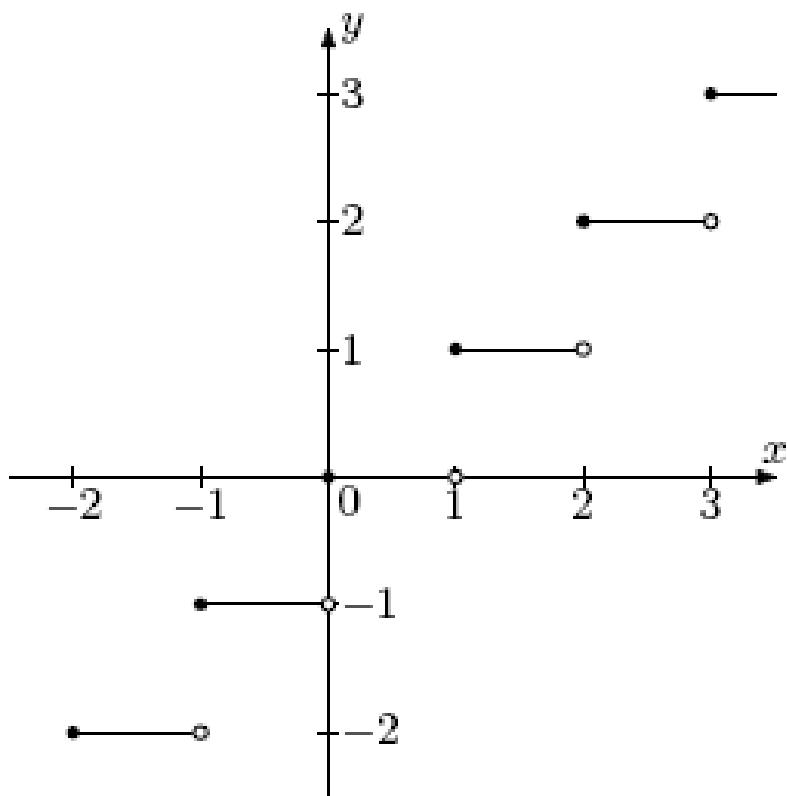
Beszélhetünk **balról** illetve **jobbról** folytonos függvényekről:

Az  $f(x)$  függvény balról folytonos az  $x_0$  pontban, ha „csak” a baloldali határértéke egyezik meg a helyettesítési értékével:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

Jobboldali folytonoságnál:  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

# Példa



$x_0=2$  helyen a függvény  
helyettesítési értéke:  
 $f(2)=2$

**a bal oldali  
határérték: 1**  
**a jobb oldali  
határérték: 2**

**A függvény jobbról  
folytonos, balról nem.**

## 9.4 Függvények folytonossága - definíciók

- Az  **$f$  függvény** az értelmezési tartományának egy szakaszán (egy intervallumon) **folytonos**, ha az intervallum minden pontjában folytonos.
- **A folytonosság művelettartó**, azaz két folytonos függvénnel műveletet végezve (alpműveletek, összetett-függvény) a kapott új függvény is folytonos lesz mindazokon a helyeken, ahol a művelettel az értelmezési tartomány nem sérül, nem szűkül, nem keletkezik szakadása.

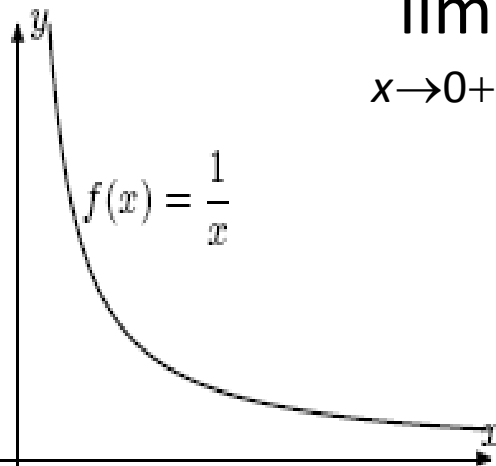


# Szakadási hely

- Ha az  $f$  függvény az értelmezési tartományának valamely pontjában nem folytonos, akkor ott a függvénynek **szakadási helye** van.
- Az  $f$  függvénynek az  $x_0$ -ban **elsőfajú szakadása** van, ha itt létezik a jobb és baloldali határértéke. Ha még az is teljesül, hogy a jobb és baloldali határérték megegyezik, akkor ez a szakadás **megszüntethető**. A függvény szakadási helye másodfajú, ha nem elsőfajú.

# Példa

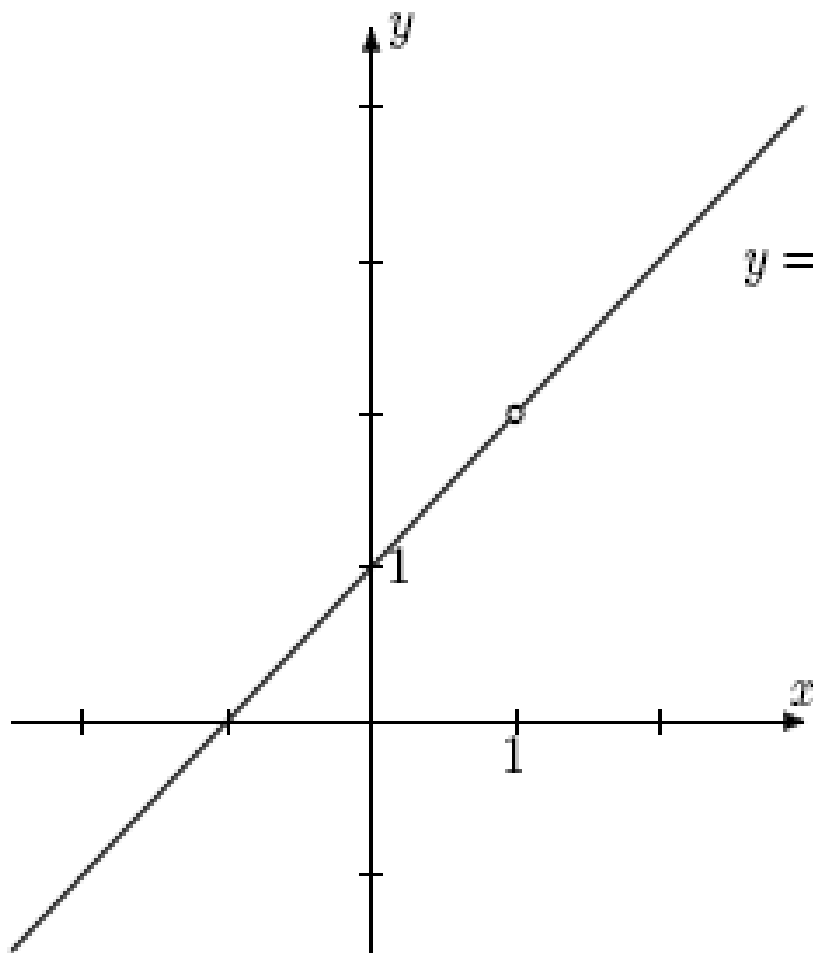
$$\lim_{x \rightarrow 0+\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{x} \right) = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0-\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

Az  $f(x) = 1/x$  függvénynek a 0-ban elsőfajú szakadás van, mert létezik a bal és a jobboldali határértéke.

# Példa



$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Az  $f$  függvénynek az  $x=1$  helyen elsőfajú szakadása van, ami megszüntethető.

# Példa

Adja meg az alábbi függvénynek a határértékét az  $x_0 = 2$ ;  $x_0 = 1$  pontokban és a  $\pm\infty$ -ben!


$$f(x) = \frac{4}{x-1} + 2$$

## Példa

Adja meg az alábbi függvénynek a határértékét az  $x_0 = 2$  pontban!

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6}$$

# Példa

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0}$$


**határozatlan alakú tört**

**Határozatlan alakúnak nevezünk egy törtet**, ha  $0/0$  vagy  $\infty/\infty$  alakú.

# Példa

Ha ilyen tört határértékét szeretnénk kiszámolni, első lehetőségünk a szorzattá alakítás (ez a zérushelyek megkeresésével történik!)

A szorzattá alakítással rendszerint ugyanaz a szorzótényező jelenik meg a számlálóban, mint a nevezőben, és ezzel elérjük, hogy a tört egyszerűbb alakra hozható a következő nevezetes határérték segítségével:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

**Köszönöm a figyelmet!**