1 Ellenőrző kérdések

1. Definiálja az egyváltozós valós függvény fogalmát.
2. Hogyan lehet szemléltetni az egyváltozós valós függvényeket?
3. Derékszögű koordináta rendszerben milyen kapcsolat van a függvény és inverze között?
4. Milyen műveleteket értelmezünk két egyváltozós valós függvény között, hogyan értelmezzük ezeket?
5. Mit nevezünk egy adott függvény zérushelyének?
6. Mi a zérushely geometriai jelentése?
7. Mi az az n-ed fokú polinom-függvény (röviden polinom)?
8. Mit tud mondani egy polinom zérushelyeinek számáról?
9. Milyen módszerekkel lehet megkeresni egy polinom zérushelyeit?
10. Ismertesse a Horner-elrendezés lényegét.
11. Mit jelent az intervallum felezés módszere?
12. Mikor mondjuk, hogy egy függvény korlátos?
13. Mikor mondjuk, hogy egy függvény monoton? Mikor mondjuk, hogy egy függvény egy adott intervallumon (szigorúan) monoton nő? Mikor mondjuk, hogy egy függvény egy adott intervallumon (szigorúan) monoton csökken?
14. Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvénynek az értelmezési tartományának egy pontjában abszolút maximuma, ill. minimuma van?
15. Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvénynek az értelmezési tartományának egy pontjában helyi maximuma, ill. minimuma van?
16. Mikor mondjuk, hogy egy függvény konvex, ill. konkáv?
17. Mit nevezünk egy adott függvény inflexiós pontjának?
18. Mi az inflexiós pont geometriai jelentése?
19. Mit jelentenek a következők egy függvénnyel kapcsolatban: periodicitás, párosság, páratlanság?
20. Adjon meg páros függvényt és ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben.
21. Adjon meg páratlan függvényt és ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben.
22. Sorolja fel az egyváltozós valós függvények nevezetes osztályait.
23. Rajzolja fel a tanult alapfüggvényeket.
24. Mi az a függvény-transzformáció?
25. Milyen függvény-transzformációkat ismer, szemléltesse ezeket Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben.
26. Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak-e.
    a) Függvénynek nevezzük az egyértelmű relációt.
    b) Egy halmaz pontosan akkor végtelen számosságú, ha ekvivalens valamelyik valódi részhalmazával.
    c) Minden üres halmaz véges.
    d) A természetes számok halmaza megszámlálható.
27. Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyek igazak, ill. hamisak.
    a) Egy n-ed fokú polinomnak (n-1) gyöke van.
    b) Az inflexiós pont a függvény olyan pontja, ahol a függvény alaki tulajdonsága megváltozik.
    c) A páros függvények az y tengelyre szimmetrikus függvények.

d) Az x^3 függvény páros függvény.
e) A trigonometrikus függvények periodikus függvények.
f) A konstansfüggvény monoton növekvő függvény.
g) A lineáris függvénynek vagy nincs zérushelye vagy 1 zérushelye van.
h) Az y=x függvényt identikus függvénynek nevezzük.
i) A másodfokú függvénynek nincs inverze, mert kölcsönösen egyértelmű leképezés.
j) Az $y=\frac{1}{x}$ függvény képe hiperbola.
k) Transzcendens függvényeknek az algebrai függvényeket nevezzük.
l) Az exponenciális függvény invertálható és inverze a hatványfüggvény.
m) Az abszolútérték függvénynek az X=0 pontban abszolút minimuma van és ez a hely egyben zérushely is.

3 Példák

1. Határozza meg az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ függvény zérushelyeit!

Megoldás:

Ez a függvény egyszerűen felírható a következő alakban:

$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, amelyből könnyen leolvasható, hogy az $x_1 = -4$ és az $x_2 = 1$ pontok a zérushelyek. Ezek a zérushelyek megkereshetők a másodfokú egyenlet megoldóképletével is, most azonban Horner elrendezéssel fogjuk megkeresni a megoldásokat. A megoldásokat -4 osztói között célszerű keresnünk (a nulla, -3, 3 nem osztói a -4-nek).

x	1	3	-4
-4	***1***	***-1***	***0***
-2	1	1	-6
-1	1	2	-6
1	***1***	***4***	***0***
2	1	5	6
4	1	7	24

Tehát f(-4) = 0 és f(1) = 0, azaz a -4 és az 1 helyen zérushelye van f(x)-nek.

2. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

a) $f(x) = \ln(1 - x)$. *Megoldás*: a logaritmus függvény változója pozitív valós szám (>0), vagyis $1-x > 0 \Rightarrow x < 1$ és $x \in R$.

b) $g(x) = x^2 - 2$. *Megoldás*: x-re semmi kikötés nincs, $x \in R$

c) $h(x) = \frac{1}{x-1}$. *Megoldás*: a nevezőben nem állhat 0, mivel 0-val való osztást nem értelmezünk $\Rightarrow x - 1 \neq 0$, így $x \neq 1$, $x \in R$

d) $y=\sqrt{1-x^2}$. *Megoldás*: a négyzetgyök alatt csak 0, vagy annál nagyobb valós szám állhat $\Rightarrow$ $1-x^2 \geq 0$, így $1 \geq x^2$. Ebből: $-1 \leq x \leq 1$, $x \in R$.

3. Jellemezze az $f(x) = \sqrt{x+5}-3$ függvényt.

Megoldás:

- Értelmezési tartomány: $D_f = \{x \mid x \in R, x \geq -5\}$
- Értékkészlet: $R_f = \{y \mid y \in R, y \geq -3\}$
- Zérushely: az $y = f(x) = \sqrt{x+5}-3=0$ egyenletet megoldva adódik, hogy $x = 4$.
- Korlátosság: mivel az értékkészlet alulról korlátos, ezért a függvény is alulról korlátos, alsó korlátja a -3. Mivel felülről nem korlátos a függvény, így nem mondható korlátosnak.
- Monotonitás: szigorúan monoton növekvő a [-5,∞[intervallumon.
- Szélsőérték: mivel a függvény alulról korlátos és alsó korlátját fel is veszi, ezért alsó korlátja egyben globális minimum is, helye : x = -5, értéke : y = -3 .
- Konvexitás: a függvény konkáv az egész értelmezési tartományon, ez az elméleti részben tárgyaltakból következik.
- Inflexiós pont: nincs.
- Paritás: a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3 Gyakorló feladatok

3.1 Függvények értelmezési tartománya, értékkészlete

1. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

$y=x^2-2$ $\qquad y=\frac{1}{x-1}$ $\qquad y=\frac{1}{2-x^2}$

$y=\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ $\qquad y=\sqrt{1-x}$ $\qquad y=\sqrt{1-x^2}$

$y=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ $\qquad y=\frac{x}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad y=\frac{\sin x}{x+3}$

$y=\frac{x+3}{\sin x}$ $\qquad y=\ln(1-x)$ $\qquad y=\ln\sqrt{1-x^2}$

$y=\ln\frac{1}{1+\ln(1-x)}$ $\qquad y=1-\lg x$ $\qquad y=\lg(x+3)$

$y=\frac{x^2-2}{3x+2}$ $\qquad y=\frac{1-2x}{x^2-1}$ $\qquad y=\frac{-4x}{2x-x^2}$

$y=\sqrt{x-x^2}$ $\quad y=\sqrt{\dfrac{2x-6}{4-4x}}$ $\quad y=\sqrt{\dfrac{3x+9}{2x-2}}$

$y=\sqrt{x^2-16}$ $\quad y=\sqrt{27-3x^2}$ $\quad y=\ln\left(x^2-3x-4\right)$

$f(x)=\lg\dfrac{x+1}{x}$ $\quad f(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{x}$ $\quad f(x)=\lg(x-4)+\lg(x+1)$

2. Határozza meg a valós számok halmazának az a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetőek!

$f(x)=\lg(x-4)+\lg(x+1)$ $\quad f(x)=\lg\dfrac{x+1}{x}$ $\quad f(x)=\lg\left(x^2-3x-4\right)$

$f(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{x}$ $\quad f(x)=\sqrt{3^x-9}$ $\quad f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\lg\sin x}$

$f(x)=\lg\left(3^x-9\right)$ $\quad f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

3. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

$y=1-\sqrt{1-x^2}$ $\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x}}$ $\quad y=\lg\dfrac{5x-x^2}{4}$

$y=\sqrt{x^2-8x+16}$ $\quad y=x^2+x\cdot|x|+3$ $\quad y=\dfrac{1}{2x+1}$

$y=|x-3|+|x+1|$ $\quad y=\sqrt{x-1}$ $\quad y=\dfrac{1}{x^2+1}$

$y=\sqrt{(x-1)^2}+1$ $\quad y=4\cdot 2^x+1$ $\quad y=\sqrt{x-4}$

$y=2\cdot\sin x-1$ $\quad y=\dfrac{x-3}{x^2+9}$ $\quad y=x^3+3x^2+3x$

3.2 Függvények zérus-helyének meghatározása

1. Határozza meg a következő függvények zérushelyeit Horner-elrendezéssel!
   a) $f_1(x)=x^4-2x^3-5x^2+6x \quad [-4,4]$
   b) $f_2(x)=x^4-3x^3-8x^2+12x+16 \quad [-4,4]$
   c) $f_3(x)=x^4-34x^2+225 \quad [-6,6]$
   d) $f_4(x)=x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12 \quad [-6,6]$
   e) $f(x)=-x^3+2x^2+5x-6 \quad [-3,3]$
   f) $f(x)=-x^4-x^3+3x^2+x-2 \quad [-3,3]$

g) $f(x)=x^3-6x^2+32\ \ [-4{,}4]$

h) $f(x)=2x^3-6x^2-2x+6\ \ [-3{,}3]$

3.3 Függvények korlátossága

1. A következő függvények esetében vizsgálja meg, hogy korlátosak-e. Korlátosság esetén adjon meg egy (alsó vagy felső, vagy alsó és felső) korlátot. Vegye figyelembe a zárójelben szereplő, értelmezési tartományra vonatkozó kikötéseket is.

   a) $y=\dfrac{x+2}{x+3}$ $\quad (x>0)$

   b) $y=\dfrac{3x+2}{x+3}$ $\quad (x>0)$

   c) $y=\dfrac{1}{x^2+2}$ $\quad (-\infty<x<+\infty)$

   d) $y=\dfrac{x}{x^2+2}$ $\quad (-\infty<x<+\infty)$

   e) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad (-1<x<+1)$

3.4 Függvények paritása

1. Állapítsa meg párosak, páratlanok, illetve korlátosak-e az alábbi függvények!

   a) $f_1:D_{f_1}=R,\quad f_1(x)=3-x^2$

   b) $f_2:D_{f_2}=R,\quad f_1(x)=|x|+2$

   c) $f_4:D_{f_4}=R,\quad f_1(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

   d) $f_6:D_{f_6}=R,\quad f_1(x)=-(x+2)^2+1$

2. Válassza ki az alábbi függvények közül a párosakat és páratlanokat!

$f_1(x)=5x^2-7\cos x+4{,}5$ $\qquad f_2(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad f_3(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

$f_4(x)=a^x-\dfrac{1}{a^x}$ $\qquad f_5(x)=x\cdot\sin^2 x-x^3$ $\qquad f_6(x)=x^3-\cos x$

3.5 Elemi függvények ábrázolása és jellemzése

1. Ábrázolja az alábbi f_i függvényeket, ha $D_f=R$ és a hozzárendelési szabályok az alábbiak:

$f_1(x)=2x+3$ $\qquad f_2(x)=x+3$ $\qquad f_3(x)=-\dfrac{2}{3}x+3$

$f_4(x)=\dfrac{3}{4}x+2$ $\qquad f_5(x)=\dfrac{3}{4}x$ $\qquad f_6(x)=\dfrac{3}{4}x-3$

2. A normál parabola transzformálásával ábrázolja az alábbi f_i függvényeket, ha $D_f = R$ és a hozzárendelési szabályok az alábbiak:

$f_1(x) = -x^2 + 3$ $\quad f_2(x) = (x+2)^2$ $\quad f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$

$f_4(x) = -2(x-3)^2 + 5$ $\quad f_5(x) = x^2 - x + 1$

$f_6(x) = 3x^2 + 8x + 2$

3. Közös koordináta-rendszerben ábrázolja az alábbi f_i függvényeket, ha $D_f = R$ és a hozzárendelési szabályok az alábbiak:

$f_1(x) = |x-3| - 1$ $\quad f_2(x) = -\frac{1}{2}|x+1| + 3$ $\quad f_3(x) = -2|x+5| + 4$

$f_4(x) = 2^x - 3$ $\quad f_5(x) = 2^{x-3}$ $\quad f_6(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$

4. Ábrázolja az alábbi f_i függvényeket, ha $D_f = R$ és a hozzárendelési szabályok az alábbiak:

$f_1(x) = \sin x$ $\quad f_2(x) = 2\sin x - 1$ $\quad f_3(x) = -\sin 2x$

$f_4(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad f_5(x) = \frac{1}{2}\cos x + 2$ $\quad f_6(x) = |\cos x| + \frac{1}{2}$

5. Ábrázolja az alábbi függvényeket és határozza meg az értelmezési tartományukat és értékkészletüket.

$y = 2x$ $\quad y = x^2$ $\quad y = x^3$

$y = \pm\sqrt{x}$ $\quad y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$ $\quad y = 2^x$

$y = \begin{cases} (3x-5) & ha(x \le 2) \\ (1-x) & ha(x \rangle 2) \end{cases}$ $\quad y = |x+1|$ $\quad y = \frac{1}{|x|}$

$y = |x^2 - 1|$ $\quad y = |2x-1| - |x|$ $\quad y = |x^2 - 6x|$

6. Az alábbi f_i függvényeket a valós számok valamely részhalmazán értelmezzük. Állapítsa meg azt a legbővebb értelmezési tartományt, amely az $f_i(x)$ hozzárendelési szabályhoz tartozhat, és ábrázolja az f_i függvényeket!

$f_1(x) = \frac{1}{x} - 3$ $\quad f_2(x) = \frac{1}{x-5} + 1$ $\quad f_3(x) = 2\sqrt{x} + 2$

$f_4(x) = \sqrt{1-x}$ $\quad f_5(x) = \sqrt{x+3} - 1$ $\quad f_6(x) = \log_3(x+1)$

7. Határozza meg az alábbi f_i függvények értékkészletét és inverz függvényét! Ábrázolja a függvényeket és inverz függvényeiket ugyanabban a koordináta-rendszerben!

$f_1 : D_{f_1} = [-3{,}6] : f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 5$ $\quad$ $f_2 : D_{f_2} = [-5{,}4] : f_2(x) = \sqrt{x+5} - 3$

$f_3 : D_{f_3} = R : f_3(x) = 2^x$ $\quad$ $f_4 : D_{f_4} = R \setminus \{1\} : f_4(x) = \frac{1}{x-1}$

8. Ábrázolja az alábbi függvényeket és írja le a menetüket!
   a) $f_1(x) = x + |x|$
   b) $f_2(x) = |2x-1| + |2x+3|$
   c) $f_3(x) = x^2 - 2|x| + 1$
   d) $f_4(x) = \begin{cases} x^2 & ha\ x \le 1 \\ -x^2 & ha\ x > 1 \end{cases}$
   e) $f_5(x) = 2x^3$
   f) $f_6(x) = x^2 - 2$

9. Ábrázolja és jellemezze az alábbi függvényeket!
   a) $f(x) = |x^2 - 7x + 10|$
   b) $f(x) = -(x-1)^2 + 4$
   c) $f(x) = 2^x + 2$
   d) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
   e) $f(x) = |x+1| - |x-2|$
   f) $f(x) = |x+2| - 3$
   g) $f(x) = |x+3| - 4$
   h) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & ha\ \ x \le 1 \\ 2x & ha\ \ x > 1 \end{cases}$

10. Ábrázolja az alábbi f_i függvényeket, ha $D_f = R$ és a hozzárendelési szabályok az alábbiak:

$f_1(x) = 2x + 3$ $\quad$ $f_2(x) = \frac{3}{4}x$ $\quad$ $f_3(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ $\quad$ $f_4(x) = 2 - 3x$

11. A normál parabola transzformálásával ábrázolja az alábbi f_i függvényeket, ha $D_f = R$ és a hozzárendelési szabályok az alábbiak:

$f_1(x) = -x^2 + 3$ $\quad$ $f_2(x) = (x+2)^2 - 2$

$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ $\quad$ $f_4(x) = -2 \cdot (x-3)^2 + 5$

$f_5(x) = x^2 - x + 1$ $\quad$ $f_6(x) = -x^2 + 8x + 2$

$f_7(x) = x^2 - 2x$ $\qquad f_8(x) = 4x - x^2$

12. Ábrázolja az alábbi f_i függvényeket, ha a hozzárendelési szabályok az alábbiak:

$f_1(x) = \frac{-1}{x+3} + 2$ $\qquad f_2(x) = \frac{2}{3-x} - 2$

$f_3(x) = \frac{2x+4}{3x-9}$ $\qquad f_4(x) = 2 - \frac{2}{x}$

13. Az alábbi f_i függvényeket a valós számok valamely részhalmazán értelmezzük. Állapítsa meg azt a legbővebb értelmezési tartományt, amely az $f_i(x)$ hozzárendelési szabályhoz tartozhat, és ábrázolja az f_i függvényeket!

$f_1(x) = 2\sqrt{x} + 2$ $\qquad f_2(x) = \sqrt{1-x}$

$f_3(x) = \sqrt{x+3} - 1$ $\qquad f_4(x) = -\sqrt{x-2} - 1$

14. Ábrázolja a következő függvényeket!

$f_1(x) = -2^x + 3$ $\qquad f_2(x) = 3^{x-1} + 2$

$f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 1$ $\qquad f_4(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 3$

$f_5(x) = -\lg(x-2) + 2$ $\qquad f_6(x) = \log_2(x+1) - 2$

$f_7(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) - 3$ $\qquad f_8(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x + 2$

15. Állapítsa meg milyen függvényekből tehetők össze az alábbi összetett függvények, ábrázolja őket és határozza meg a D_f és R_f értékeket is!

$f_1(x) = \sin(3x+1)$ $\qquad f_2(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 5}$

$f_3(x) = \frac{1}{4x^2 - 12x + 5}$ $\qquad f_4(x) = \cos\sqrt{x+2}$