

Matematika

A középiskolás anyag ismétlése

Első gyakorlat

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	1
Halmazok	2
Racionális kifejezések azonos átalakításai	2
Irracionális kifejezések azonos átalakításai	3
A logaritmus fogalma, alkalmazásai	4
Elsőfokú egyenletek és egyenletrendszerek	4
Másodfokú egyenletek és egyenletrendszerek	4
Gyökös kifejezéseket tartalmazó egyenletek	5
Exponenciális és logaritmikus egyenletek	6
Egyenlettel vagy egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok	7
Egyenlőtlenségek	7
Függvények értelmezése és ábrázolása	8
Térfogat- és felszínszámítás	9
Számtani és mértani sorozatok	9

Halmazok

1. [205] Határozza meg az A és B halmazok elemeit, ha tudja, hogy

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$A \cap B = \{3; 5\}$$

$$A \setminus B = \{1\}$$

$$B \setminus A = \{2; 4\}$$

2. [210] Határozza meg az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazok elemeit, ha \mathbb{R} a valós számok halmazát jelenti és

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 4 \leq 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x - 1 \leq 0\}$$

3. [220] Határozza meg az $A \cap B$ halmazt, ha \mathbb{N} a természetes számok halmazát jelenti és

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \leq 4x - 6\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4x - 11 \leq 2x + 11\}$$

4. [222] Egy csoport létszáma 30. A csoportban három nyelvet tanulnak: angolt, orosz és franciát, és minden diák legalább egy nyelvet tanul. Angolul 14-en tanulnak, oroszul 15-en, franciául pedig 5-en. Pontosan két nyelvet összesen hat diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

Racionális kifejezések azonos átalakításai

5. [229] Melyik szám nagyobb? $\frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}}$ vagy $\frac{1}{2^9}$

6. [240] Egyszerűsítse a következő törtet. ($a \neq 0; b \neq 0$)

$$\frac{(ab)^2 \cdot (b^2)^3 \cdot a^4 \cdot b^7}{(a^2 \cdot b)^3 \cdot (b^3 \cdot a)^2}$$

7. [242] Végezze el a következő műveleteket és határozza meg a kifejezés helyettesítési értékét, ha $x = -10$

$$(2x + 1) \cdot (x - 2)^2 - 2x \cdot (x + 2)^2 + 15 \cdot x^2$$

8. [248] Végezze el a következő műveleteket. ($x \neq 0; y \neq 0$)

$$\frac{(9x^2y^3)^4}{(5x^2y^4)^3} \div \frac{(3xy^2)^6}{(5xy^5)^3}$$

9. [254] Végezze el a következő műveleteket. ($|b| \neq 1/2$)

$$\frac{3b+2}{2b+1} + \frac{1-4b}{2b-1} + \frac{2b^2-b}{4b^2-1}$$

10. [267] Végezze el a következő műveleteket. ($b \neq -\frac{1}{5}; b \neq 2$)

$$\frac{b^2-4}{10b+2} : \left(\frac{11b}{10b+2} - 1 \right)$$

11. [296] Végezze el a következő műveleteket. ($|c| \neq 2; c \neq 4$)

$$\left(\frac{2c}{c+2} + \frac{2c}{6-3c} + \frac{8c}{c^2-4} \right) : \frac{c-4}{c-2}$$

Irracionális kifejezések azonos átalakításai

12. [334] Mely egész x -ekre igaz a következő egyenlőtlenség?

$$\sqrt{(x+4)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = 3$$

13. [341]; [343]; [344] Mely valós számokra értelmezhetők az alábbi kifejezések?

$$\sqrt{x^2-1}$$

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{2^x-4}$$

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$$

14. [396] Írja fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezést ($a > 0; b > 0$)

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}}$$

15. [404] Végezze el a következő műveleteket ($x \geq 0; x \neq 1$)

$$\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{3x-1}{x-1}$$

A logaritmus fogalma, alkalmazásai

16. [434] Számítsa ki a következő kifejezés értékét: $5^2 \cdot 5^{\log_{25} 36-1}$
17. [441] Számítsa ki a következő kifejezés értékét: $3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4}$
18. [486] Állapítsa meg az egyenlet két gyökének szorzatát: $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$ ($x > 0$)

Elsőfokú egyenletek és egyenletrendszerek

19. [491] Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$7x + 5 = 6x + 25$$

20. [495] Mely valós x -ekre igaz a következő egyenlet?

$$15(x + 2) = 6(2x + 7)$$

21. [506] Van-e a következő egyenletnek pozitív gyöke, ha van, adja meg a gyököt.

$$5(3x + 5) - 4(2x - 3) = 5x + 3(2x + 12) + 1$$

22. [514] Határozza meg a következő egyenlet racionális gyökét.

$$\frac{x}{12} - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 2 - \frac{2x}{3}$$

23. [575] Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenletet.

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x+1)}{3x-3} = \frac{1}{3}$$

24. [621] Oldja meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 8y = 10 \end{cases}$$

25. [636] Írja fel a következő egyenletrendszer valós megoldásait.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 15 \end{cases}$$

Másodfokú egyenletek és egyenletrendszerek

26. [669] Oldja meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán.

$$10x^2 - 50x = 0$$

27. [682] Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halazán.

$$5x^2 - 16x + 3 = 0$$

28. [721] Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halazán.

$$\frac{3x - 7}{x + 5} = \frac{x - 3}{x + 2}$$

29. [741] Oldja meg az alábbi egyenletet a pozitív számok halazán.

$$\frac{5x}{x + 3} - \frac{7 + x}{3 - x} = \frac{12(x + 2)}{4x^2 - 1}$$

30. [799] Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a természetes számok halazán.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ xy - 4 = 0 \end{cases}$$

31. [811] Oldja meg a következő egyenletrendszert a nemnegatív számok halmazán.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = y \\ 1 - 2x = y \end{cases}$$

32. [826] Mely valós számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszert?

$$\begin{cases} \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} = 2 \\ \frac{3}{x + y} + \frac{4}{x - y} = 7 \end{cases}$$

Gyökös kifejezéseket tartalmazó egyenletek

33. [873] Oldja meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$\sqrt{x + 2} - \sqrt{1 - 3x} = 0$$

34. [886] Határozza meg a következő egyenlet valós megoldásait.

$$\sqrt{x^2 + 1} = 4$$

35. [920] Oldja meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán.

$$\sqrt{x^2 - 16} = x - 4$$

36. [931] Oldja meg a következő egyenletet az egész számok halmazán.

$$\sqrt{x + 3} + \frac{4}{\sqrt{x + 3}} = 4$$

37. [950] Van-e a következő egyenletnek a $]5; 9[$ számközben gyöke?

$$\sqrt{x} + \sqrt{x - 5} = \sqrt{10 - x}$$

Exponenciális és logaritmikus egyenletek

38. [971] Oldja meg a következő egyenletet az egész számok halmazán.

$$3^{-x} = 243$$

39. [976] Van-e a következő egyenletnek racionális gyöke?

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{8^x}$$

40. [986] Mely valós x értékekre teljesül, hogy

$$25 \cdot 2^x - 8 \cdot 5^{x-1} = 0$$

41. [1026] Oldja meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán.

$$10 \cdot 2^x - 4^x = 16$$

42. [1050] Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\lg x = 3 - \lg 5$$

43. [1057] Határozza meg a következő egyenlet egész gyökét!

$$\frac{\lg(3x - 1)}{\lg(2x + 3)} = 1$$

44. [1085] Oldja meg a következő egyenletet a nemnegatív számok halmazán.

$$2 \cdot \lg(2x - 1) = \lg(3x + 1)$$

45. [1106] Adja meg a következő egyenlet megoldáshalmazát, ha x valós szám.

$$\log_2(3 + 2^x) + \log_2(5 - 2^x) = 4$$

Egyenlettel vagy egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok

46. [1172] Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 12. Ha a jegyeket felcseréljük a szám értéke 75%-kal növekszik. Melyik ez a szám?
47. [1283] Két testvér életkorának összege 16 év. Amikor ez az összeg megkétszereződik, a fiatalabb testvér életkora annyi lesz, mint az idősebb testvére most. Hány évesek a testvérek most?
48. [1343] Melyik az a kétjegyű szám, amelynek az első jegye 4-gyel nagyobb, mint a második, továbbá a szám és a szám jegyei összegének szorzata 306?
49. [1349] Egy téglalap alakú telek egyik oldala 20 m-rel hosszabb, mint a másik. A telek területe 2400 m². A telket a kerülete mentén belülről 4 cm vastag, 2 m magas deszkalappal vesszük körül. Hány m³ deszkára van szükség, ha 6% hulladékkal kell számolni?

Egyenlőtlenségek

50. [1409] Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$4x + 3 \geq 9x - 2$$

51. [1419] Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. A $[0; 1]$ intervallum részhalmaz-e a megoldáshalmaznak?

$$\frac{5x - 1}{8} > \frac{1 - 2x}{7} + 1$$

52. [1470] Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$2 - \frac{x - 3}{x - 2} \geq \frac{x - 2}{x - 1}$$

53. [1493] Oldja meg a következő egyenlőtlenséget az egész számok halmazán.

$$\frac{x - 3}{x^2 - 8x + 16} > 0$$

54. [1511] Határozza meg a következő egyenlőtlenség valós megoldásait.

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 12x + 20} < 0$$

55. [1543] Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\sqrt{x-2} + x > 4$$

56. [1552] Oldja meg a következő egyenlőtlenséget az egész számok halmazán.

$$\lg\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{1 + x^2}\right) > 0$$

Függvények értelmezése és ábrázolása

57. [1586] Határozza meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetők

- a) $x - 3$
- b) $(\sqrt{x-3})^2$
- c) $\sqrt{(x-3)^2}$
- d) $\log_2 x$
- e) $\sqrt{3^x - 9}$
- f) $\lg(3^x - 9)$
- g) $\lg x^2$
- h) $\lg(x-4) + \lg(x+1)$
- i) $\lg(x^2 - 3x - 4)$
- j) $\lg\sqrt{x-1}$
- k) $\sqrt{\lg(x-1)}$
- l) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

58. Ábrázolja és jellemezze a következő függvényeket.

- a) $y_1 = 2x - 3$
- b) $y_2 = -x^2 - 4$
- c) $y_3 = x^2 + 2x - 3$
- d) $y_4 = 2^x$
- e) $y_5 = |x + 3| - 2$
- f) $y_6 = \frac{1}{x-2} + 3$

Térfogat- és felszínszámítás

59. [2247] Egy téglatest térfogata 7500 cm^3 , egyik csúcsában összefutó éleinek aránya 3:4:5. Mekkora a felszíne?
60. [2247] Egy négyzet alapú egyenes hasáb térfogata $19,845 \text{ dm}^3$, alapjának kerülete 84 dm . Mekkora a felszíne?
61. [2335] Egy egyenes körhenger alaplajjának területe 34 cm^2 , magassága 48 cm . Mekkora a felszíne és térfogata?

Számtani és mértani sorozatok

62. [3475] Egy számtani sorozat harmadik tagja 50; a sorozat tizedik tagja 10-zel kisebb a nyolcadik tagnál. Határozza meg a sorozat első tagját.
63. [3477] Egy számtani sorozat huszonnyolcadik tagja 28; kétszáznegyvenharmadik tagja 243. Mennyi az első 243 tag összege?
64. [3579] Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 112, a következő három tag összege pedig 14. Melyik ez a sorozat?
65. [3620] Egy országban ma a lakosság 15 millió, 100 évvel ezelőtt 10 millió volt. Hány %-os az évi átlagos népszaporulat?

Debrecen, 2018. szeptember

Dr. Vincze Szilvia