Sorozatok

Dr. Vincze Szilvia

7. SOROZATOK

7.1 Sorozat definíciója
7.2 Sorozat megadása
7.3 Sorozatok szemléltetése
7.4 Műveletek sorozatokkal
7.5 A sorozatok tulajdonságai
7.6 Sorozatok konvergenciája
7.7 A sorozatok határértékének kiszámítására vonatkozó tételek
7.8 Végtelen, mint határérték
7.9 Nevezetes határérték

Bevezető gondolatok

Az ún. felsőbb matematika egyik alapfogalma a **határérték,** mely viszonylag könnyen megérthető a (szám)sorozatok tanulmányozásával.

7.1 Sorozat definíciója

- A **sorozat egy speciális függvény**.

- A sorozat valós számok egymásutánja:

$$1;\ \tfrac{1}{2};\ 1/3;\ \tfrac{1}{4};\ 1/5;\ \ldots$$

A matematikában használatos a sorozat szó akkor is, amikor az elemek nem valós számok (algebrai kifejezések, függvények stb.).

- Mi csak a **valós számsorozatok**kal foglalkozunk.

7.1 Sorozat definíciója

A természetes számok halmazán értelmezett valós értékű:

$$a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényt **valós számsorozat**nak (röviden sorozatnak) nevezzük.

- A sorozat **jelölés**ére az (a_n) szimbólumot használjuk.
- A sorozatot mindig végtelen sok elemből állónak értelmezzük (általában az analízisben).
- A véges sok elemű sorozat általános értelemben vett, vagyis a végtelen sorozat része (általában a gyakorlatban).

7.2 Sorozat megadása

- **Szóbeli közléssel**: A sorozatot az egész számok négyzetei alkotják (0; 1; 4; 9; 16; …)

- **A sorozat egy részének konkrét megadásával**:

  (0; 2; 4; 6; 8; …)

- **Képlettel**, azaz megadjuk az általános (n-edik) tagot:

$$a_n = 5 - 2n^2$$

7.2 Sorozat megadása

- **Rekurzióval**: megadjuk a sorozat néhány kezdő tagját, majd előírjuk, hogyan kell a sorozat bármely tagját az előzőek ismeretében kiszámítani

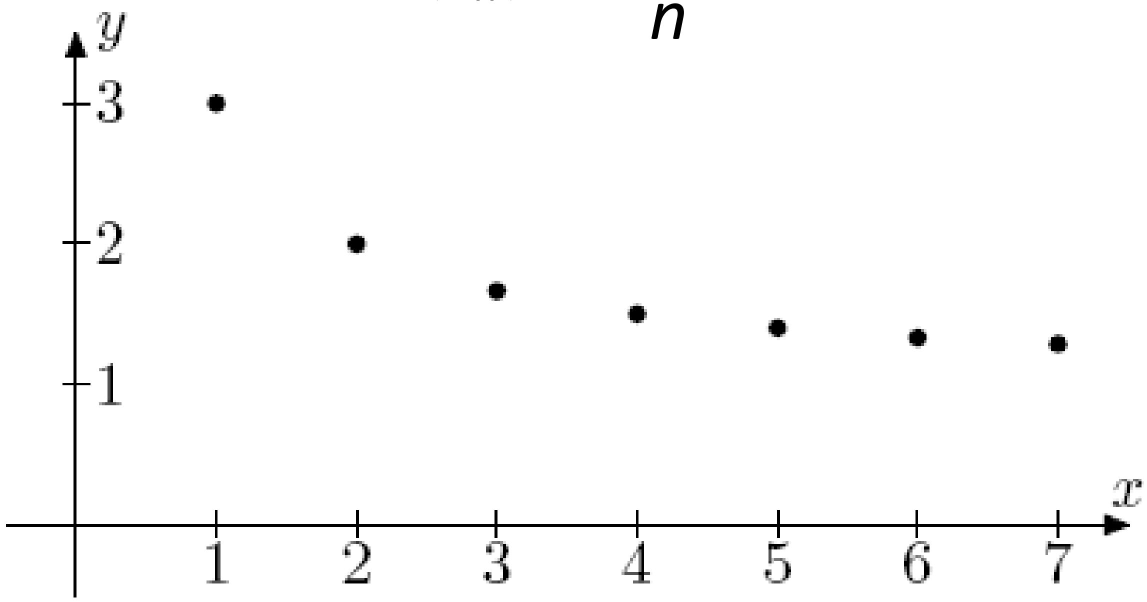
$$a_1=a_2=1;\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n=3,4,\dots)$$

(Fibonacci sorozat)

7.3 Sorozatok szemléltetése

- A sorozat egy speciális függvény, így szemléltethetjük **koordináta rendszerben**.

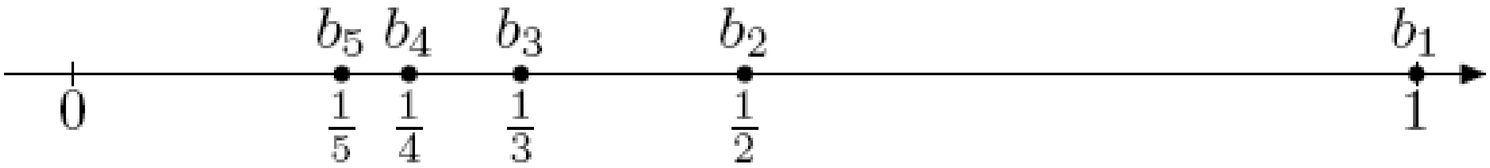
$$(a_n) = \frac{n+2}{n}$$



7.3 Sorozatok szemléltetése

- **Számegyenesen** megjelöljük a sorozat tagjait és az így kapott pontsorozatot tekintjük a sorozat képének.

$$(b_n) = \frac{1}{n}$$



7.4 Műveletek sorozatokkal

Definíció. Legyen adott az (a_n) és a (b_n) sorozat. Ekkor

(1) a **két sorozat összege** a $c_n = a_n + b_n$ $(\forall\, n \in \mathbf{N})$ képlettel értelmezett (c_n) sorozat,

(2) a **két sorozat különbsége** a $c_n = a_n - b_n$ $(\forall\, n \in \mathbf{N})$ képlettel értelmezett (c_n) sorozat,

(3) a **két sorozat szorzata** a $c_n = a_n \cdot b_n$ $(\forall\, n \in \mathbf{N})$ képlettel értelmezett (c_n) sorozat,

(4) a **két sorozat hányadosa** a $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$ $(\forall\, n \in \mathbf{N})$ képlettel értelmezett (c_n) sorozat,

(5) egy **sorozat** $\lambda \in \mathbf{R}$ **skalárszorosa** a $c_n = \lambda \cdot a_n$, $(\forall\, n \in \mathbf{N})$ képlettel értelmezett (c_n) sorozat.

7.5 Sorozatok tulajdonságai

- Az (a_n) sorozat **monoton növekedő**, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll: $a_n \leq a_{n+1}$.
- Az (a_n) sorozat **szigorúan monoton növekedő**, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll: $a_n < a_{n+1}$.
- Az (a_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll: $a_n \geq a_{n+1}$.
- Az (a_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll: $a_n > a_{n+1}$.

7.5 Sorozatok tulajdonságai - Monotonitás vizsgálata

Az a_{n+1}-a_n különbség vagy az a_{n+1}/a_n hányados vizsgálatával ($\forall$ n$\in$ **N** esetén)

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} \geq 0, & \text{akkor az } (a_n) \text{ sorozat monoton nő,} \\ \leq 0, & \text{akkor az } (a_n) \text{ sorozat monoton csökken;} \end{cases}$$

továbbá ha $a_n > 0$ és $\forall n \in \mathbf{N}$-re

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \geq 1, & \text{akkor az } (a_n) \text{ sorozat monoton nő,} \\ \leq 1, & \text{akkor az } (a_n) \text{ sorozat monoton csökken.} \end{cases}$$

7.5 Sorozatok tulajdonságai - Korlátosság

- Az (a_n) sorozatot **alulról korlátos**nak mondjuk, ha értékkészlete alulról korlátos, azaz létezik $k \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $k \leq a_n$, minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.
- Az (a_n) sorozatot **felülről korlátos**nak mondjuk, ha értékkészlete felülről korlátos, azaz létezik $K \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $K \geq a_n$, minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.
- Az (a_n) **sorozat korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Megjegyzések- Korlátosság

Ha egy sorozat korlátos, akkor végtelen sok korlátja van, hiszen minden alsó korlátnál kisebb szám is alsó korlát, és minden a felső korlátnál nagyobb szám is felső korlát.

7.5 Sorozatok tulajdonságai – Pontos alsó- és felső korlát

- Az (a_n) alulról korlátos sorozat legnagyobb alsó korlátját az (a_n) sorozat **pontos alsó korlát**jának vagy **infimum**ának mondjuk,

  jele: inf (a_n)

- Az (a_n) felülről korlátos sorozat legkisebb felső korlátját az (a_n) sorozat **pontos felső korlá**tjának vagy **supremum**ának mondjuk,

  jele: sup (a_n)

7.5 Sorozatok tulajdonságai – Maximum és minimum

- Az (a_n) **sorozat minimuma** a sorozatnak az az a_{m0} tagja, amelyre minden $n \in N$ esetén teljesül, hogy $a_{m0} \leq a_n$.
- Az (a_n) **sorozat maximuma** a sorozatnak az az a_{m0} tagja, amelyre minden $n \in N$ esetén teljesül, hogy $a_{m0} \geq a_n$.

7.5 Példa – sorozatok jellemzése

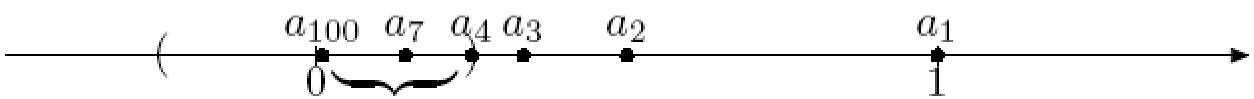
Jellemezze a következő sorozatokat (monotonitás, korlátosság, szélsőérték)

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{3}{2n-1}$$

$$c_n = 2n^2 + 2$$

7.6 Konvergencia definíciója



A korlátosság vizsgálatát célszerű összekötni a **konvergencia** vizsgálatával.

1.) Konvergens: *„összetart, közös cél felé halad"*.
2.) A sorozatok közül néhánynál észrevehetjük, hogy a tagok egy vagy több szám körül sűrűsödnek, torlódnak, konvergálnak.

7.6 Konvergencia definíciója

Azt mondjuk, hogy az **(a_n)** **sorozat konvergens** és határértéke az $A \in \mathbf{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbf{N}$ (ε-tól függő) szám úgy, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ minden $n > \mathbf{N}$ esetén.

1.) Azt, hogy az a_n sorozat határértéke az A szám így jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

2.) A fenti jelölés mellett szokás még alkalmazni az $a_n \to A$ $(n \to \infty)$ jelölést is.

7.6 Konvergencia - definíciók

- Azt mondjuk, hogy az **(a_n)** **sorozat divergens,** ha nem konvergens.
- Az (a_n) sorozatot **nullsorozat**nak nevezzük ha konvergens és határértéke a 0.

Példa

Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozat konvergens és határértéke 2.

$$a_n = \frac{2n+4}{n+1}$$

7.7 Határérték-számításhoz kapcsolódó tételek

- A határérték mindig egyértelmű.
- Minden konvergens sorozat korlátos.
- Ha az (a_n) sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)$$

- Ha az (a_n) sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(a_n)$$

Példa

Jellemezze az (a_n) sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából és adja meg a sorozat határértékét:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

7. 7 Sorozatok határértékének kiszámítására vonatkozó tételek

- Legyenek (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok. Ekkor az $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens és
  $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$$

- Ha az (a_n) konvergens sorozatok és $\lim_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$. Ekkor az (a_n/b_n) sorozat is konvergens és
  $$\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n$$

7. 7 Sorozatok határértékének kiszámítására vonatkozó tételek

- Legyen (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok. Ekkor az (a_n+b_n) is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

- Ha az (a_n) konvergens sorozat és $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, továbbá (b_n) korlátos, akkor
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0.$$

- Legyen az (a_n) konvergens sorozat és $\lambda\in$ **R.** Ekkor a $(\lambda\cdot a_n)$ soroat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty}(\lambda\cdot a_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty}a_n)$$

7. 8 Végtelen, mint határérték

- Az **(a_n) sorozat a $+\infty$-be divergál,** ha minden $m \in \mathbf{R}$ esetén létezik $N \in \mathbf{N}$ (m-től függő) küszöbindex, hogy $a_n > m$ minden $n > \mathbf{N}$-re.

  Jele: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

- Az **(an) sorozat a $-\infty$-be divergál,** ha minden $k \in \mathbf{R}$ esetén létezik $N \in \mathbf{N}$ (k-tól függő) küszöbindex, hogy $a_n < k$ minden $n > \mathbf{N}$-re.

  Jele: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Példák divergens sorozatokra

- A természetes számok 1, 2, 3, ... , n, ... sorozata a végtelenbe divergál.
- A 2, 4, 8, ... 2^n, ... sorozat a végtelenbe divergál.
- A -2, -4, -6, ... , -2n, ... sorozat a mínusz végtelenbe divergál.

7. 8 Tételek - Végtelen, mint határérték

- Ha az (a_n) sorozat minden eleme pozitív és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$$

- Ha az (a_n) sorozat minden eleme negatív és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=-\infty$$

7. 9 Nevezetes határértékek

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} \infty, & ha\ c > 1, \\ 1, & ha\ c = 1, \\ 0, & ha\ 0 < c < 1; \end{cases}$$

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty, & ha\ q > 0,\ q \in \mathbf{R}, \\ 1, & ha\ q = 0, \\ 0, & ha\ q < 0,\ q \in \mathbf{R}; \end{cases}$$

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1,\ ha\ c > 0\ ;$$

$$(4)\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ ;$$

7. 9 Nevezetes határértékek

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e;$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}\ ;$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{c}{n}\right)^n = e^c\ ;$

(8) *Ha az* (r_n) *sorozat olyan, hogy* $|r_n| > 1$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty}|r_n| = +\infty$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = e.$$

Példa – sorozatok határérték-számítása

$$a_n = \frac{3n^2 - 2n + 3}{n^2 + 3n + 3}$$

$$b_n = \frac{2n + 2}{3n^2 - 3n + 3}$$

$$c_n = \frac{-2n^3 + 2}{3n^2 - 3n + 3}$$

$$d_n = \frac{\sqrt[3]{2n^3 + 2}}{\sqrt[3]{3n^2 + 3n + 3}}$$

$$e_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

$$f_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{2n-1}$$

Határérték-számítás - segédlet

Sorozat alakja	Megjegyzés
1.) polinom	A legmagasabb fokszámú tag együtthatójának előjele szerint $\pm\infty$
2.) polinom/polinom	
számláló fsz = nevező fsz	A legnagyobb fokszámú tagok együtthatóinak hányadosa
számláló fsz < nevező fsz	A határérték nulla
számláló fsz > nevező fsz	A határérték a legmagasabb fokszámú tagok előjelétől függően $\pm\infty$

Határérték-számítás - segédlet

<table>
<tr><th>Sorozat alakja</th><th>Megjegyzés</th></tr>
<tr><td>3.) exponenciális kifejezést tartalmazó</td><td>Nevezetes határérték</td></tr>
<tr><td>4.) gyökös kifejezést tartalmazó</td><td>Törtté alakítjuk</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5.) gyök kifejezés /gyök kifejezés</td><td>Meg kell vizsgálni, hogy a számlálóban és a nevezőben milyen a gyökkitevő</td></tr>
<tr><td>A.) Ha azonos: közös gyök alá vonjuk őket</td></tr>
<tr><td>B.) Ha különböző, akkor a számlálóban és a nevezőben is az n-nek annyiadik hatványát emeljük ki, amennyi az adott gyökkitevő</td></tr>
</table>

Határérték-számítás - segédlet

Sorozat alakja	Megjegyzés
6.) $(1+1/n)^n$ alakú kifejezés	Nevezetes határérték

Köszönöm a figyelmet!