# Teljes függvényvizsgálat

Dr. Vincze Szilvia

# 13. TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT LÉPÉSEI

13.1 Az értelmezési tartomány meghatározása
13.2 Zérushely(ek) meghatározása
13.3 A függvény határértékének vizsgálata (végtelenben, vagy az értelmezési tartomány végpontjaiban és a szakadási helyeken)
13.4 Lehetséges szélsőérték(hely)ek meghatározása
13.5 Lehetséges inflexiós pont(ok) meghatározása
13.6 A deriváltak segítségével a függvény menetének, konvexitási intervallumának meghatározása
13.7 A függvény valódi szélsőértékhelyeinek és inflexiós pontjainak megadása
13.8 A függvény grafikonjának megrajzolása
13.9 A függvény értékkészletének meghatározása

# Példa: Végezze el a következő függvény teljes vizsgálatát

$$\boxed{f(x) = x^3 - 5x^2}$$

(1) A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, azaz $D_f = \mathbf{R}$.

(2) Határozzuk meg, hogy hol van a függvénynek zérushelye. Ehhez az $x^3 - 5x^2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk.

$$x^3 - 5x^2 = 0,$$

$$x^2(x-5) = 0,$$

$$x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 5.$$

(3) Mivel a függvénynek nincs szakadási helye, ezért a határértéket csak a $\pm\infty$-ben kell vizsgálnunk.

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 5x^2 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 5x^2 = -\infty.$$

# Példa

(4) A függvénynek ott lehet szélsőértékhelye, ahol $f'(x) = 0$. Mivel $f'(x) = 3x^2 - 10x$, azaz meg kell oldanunk a $3x^2 - 10x = 0$ egyenletet.

$$x\,(3x - 10) = 0,$$
$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = \frac{10}{3}.$$

(5) A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol $f''(x) = 0$. Mivel $f''(x) = 6x - 10$, így meg kell oldanunk a $6x - 10 = 0$ egyenletet.

$$x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

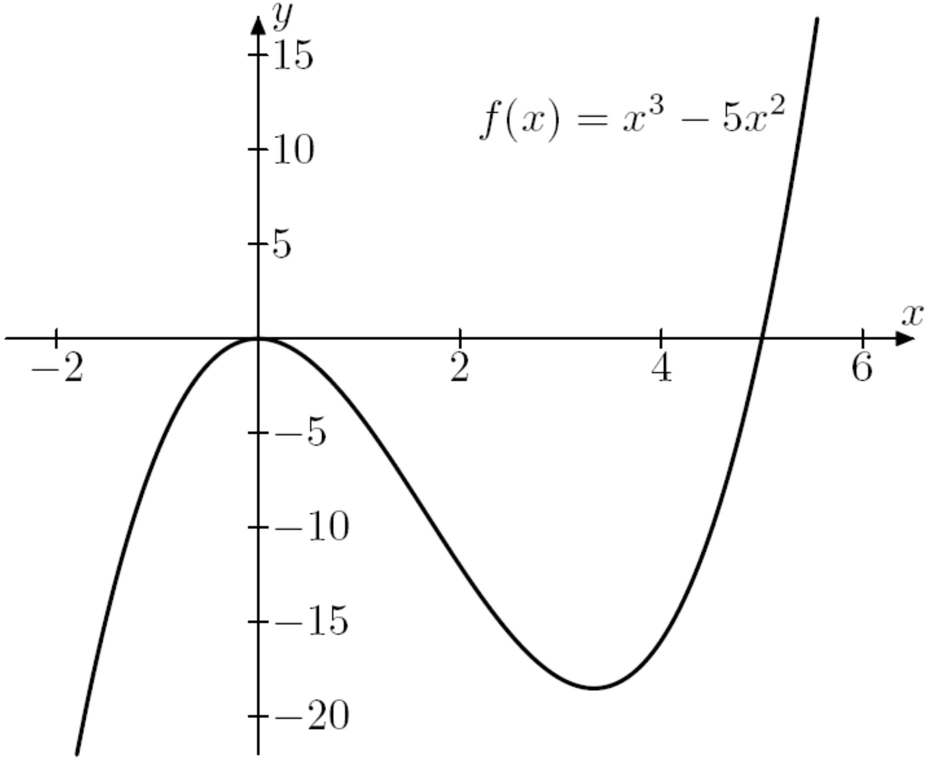
# Példa

(6) Táblázatot készítünk a lehetséges szélsőértékhelyek és lehetséges inflexiós pont segítségével.

| | $x<0$ | $x=0$ | $0<x<\frac{5}{3}$ | $x=\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{3}<x<\frac{10}{3}$ | $x=\frac{10}{3}$ | $\frac{10}{3}<x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | max.h. | $\searrow$ | | $\searrow$ | min.h. | $\nearrow$ |
| | konkáv | | | I.P. | konvex | | |

# Példa

(7)




(8) A függvény értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.

## Példa: Végezze el a következő függvény teljes vizsgálatát

$$\boxed{f(x)=\frac{1-x}{(1+x)^2}}$$

(1) Az $f$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

(2) Az $\dfrac{1-x}{(1+x)^2} = 0$ egyenlet megoldása az $x = 1$. Azaz a függvénynek egyetlen zérushelye van, az $x = 1$.

# Példa

(3) Meg kell vizsgálnunk a függvény határértékét a $\pm\infty$-ben és a szakadási helyen, ahol jobb és bal oldali határértéket kell számolnunk.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{(1+x)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2\,(1+x)} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{(1+x)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{2\,(1+x)} = 0,$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{1-x}{(1+x)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(-1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\left(-1+\frac{1}{n}\right)\right)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(2-\frac{1}{n}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{1-x}{(1+x)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(-1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\left(-1-\frac{1}{n}\right)\right)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(2+\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

# Példa

(4) Keressük meg az $f$ függvény lehetséges szélsőértékhelyeit!

$$f'(x) = \frac{-(1+x)^2 - (1-x)\cdot 2\,(1+x)}{(1+x)^4} =$$

$$= \frac{(1+x)\big[-(1+x) - 2\,(1-x)\big]}{(1+x)^4} = \frac{x-3}{(1+x)^3},$$

azaz az $\dfrac{x-3}{(1+x)^3} = 0$ egyenletet kell megoldanunk, melynek megoldása: $x = 3$.

# Példa

(5) Határozzuk meg az $f$ függvény lehetséges inflexiós pontjait!

$$f''(x) = \frac{1 \cdot (1+x)^3 - (x-3) \cdot 3\,(1+x)^2}{(1+x)^6} =$$

$$= \frac{(1+x)^2\left[1 + x - 3\,(x-3)\right]}{(1+x)^6} = \frac{10-2x}{(1+x)^4},$$

azaz a $\dfrac{10-2x}{(1+x)^4} = 0$, az egyenlet megoldása: $x = 5$.

# Példa

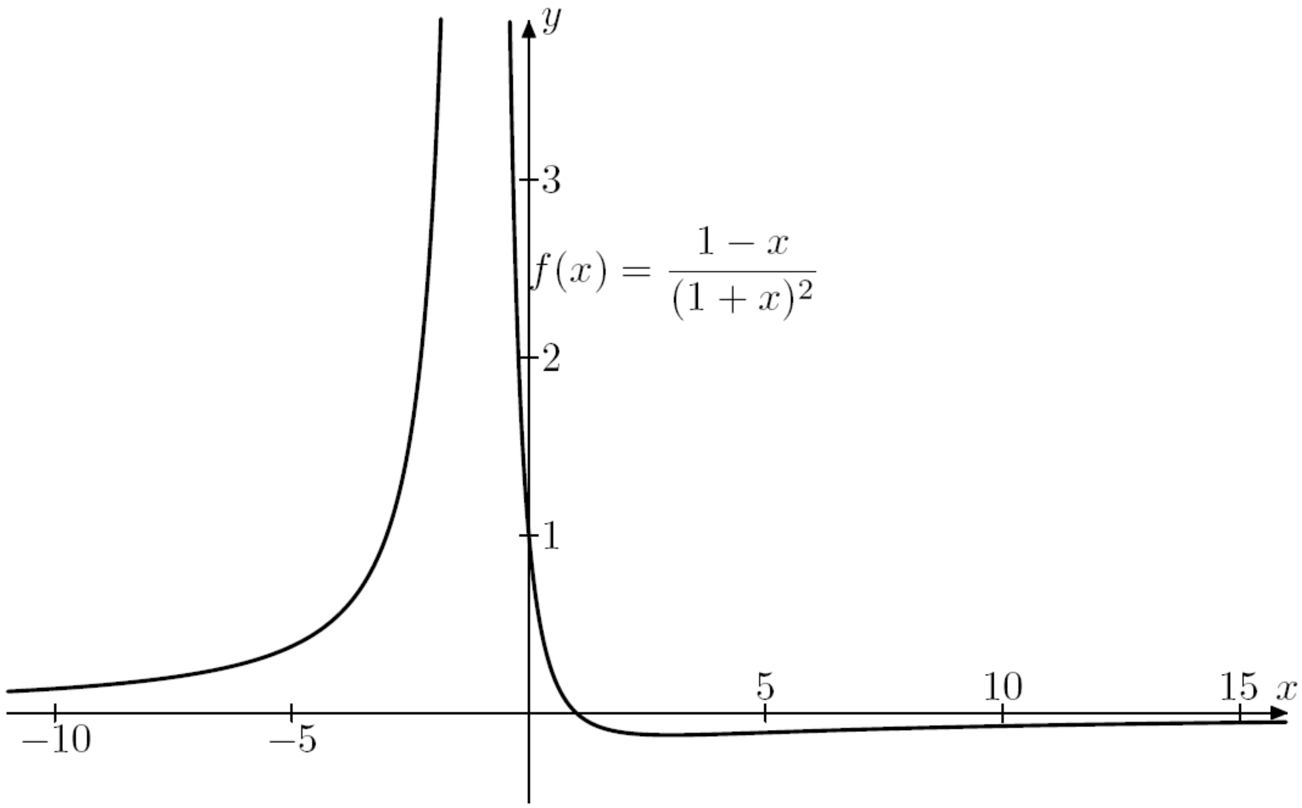
(6) Készítsük el a táblázatot az 5, 3, $-1$ pontok segítségével.

| | $x < -1$ | $-1 < x < 3$ | $x = 3$ | $3 < x < 5$ | $x = 5$ | $5 < x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f'$ | $+$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | min.h. | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |
| | konvex | konvex | | | I.P. | konkáv |

$$f(3) = -\tfrac{1}{8},\ f(5) = -\tfrac{1}{9}.$$

# Példa

(7)




(8) Értékkészlet: $R_f = \left\{ y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y \geq -\frac{1}{8} \right\}$.

# Köszönöm a figyelmet!