DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI: TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

1 Ellenőrző kérdések

1. Sorolja fel a teljes függvényvizsgálat lépéseit!
2. Ismertesse a deriváltak alkalmazását a függvények teljes vizsgálatánál!

2 Példák

1. Vizsgálja meg az $f(x) = x^3 - 5x^2$ függvényt!

Megoldás:

(1) A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, azaz $D_f = R$.

(2) Határozzuk meg, hogy hol van a függvénynek zérushelye.

Ehhez az $x^3 - 5x^2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk.

$$x^3 - 5x^2 = 0,$$

$$x^2 (x - 5) = 0,$$

$$x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 5.$$

Tehát a függvénynek két zérushelye van: $x_1 = 0$ és $x_2 = 5$.

(3) Mivel a függvénynek nincs szakadási helye, ezért a határértéket csak a $\pm\infty$-ben kell vizsgálnunk.

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 5x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 5x^2 = -\infty$$

(4) A függvénynek ott lehet szélsőértékhelye, ahol $f'(x) = 0$.

Mivel $f'(x) = 3x^2 - 10x$, meg kell oldanunk a $3x^2 - 10x = 0$ egyenletet.

$$x (3x - 10) = 0,$$

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = \frac{10}{3}.$$

Számítsuk ki továbbá a szélsőértékhelyekhez tartozó értékeket:

$f(0)=0$ és $f\left(\frac{10}{3}\right) = -\frac{500}{27}$

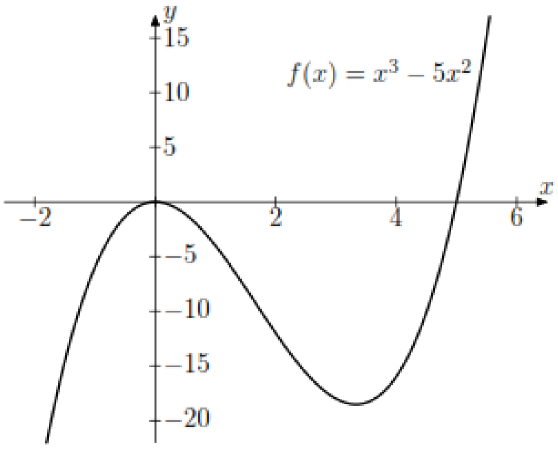
(5) A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol $f''(x) =0$. Mivel $f''(x) = 6x - 10$, így meg kell oldanunk a $6x - 10 = 0$ egyenletet.

$$x_3 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

(6) Táblázatot készítünk a lehetséges szélsőértékhelyek és inflexiós pontok segítségével

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{5}{3}$	$x = \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < \frac{10}{3}$	$x = \frac{10}{3}$	$\frac{10}{3} < x$
f''	–	–	–	0	+	+	+
f'	+	0	–	–	–	0	+
f	↗	MAX	↘	I.P.	↘	MIN	↗
		konkáv				konvex	

(7) A függvény grafikonja



(8) A függvény értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.

2. Vizsgálja meg az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvényt.

Megoldás:

(1) Az f függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

(2) Az $x + \frac{1}{x} = 0$ egyenlet megoldása adja a függvény zérushelyét. Mivel ennek az egyenletnek nincs megoldása ($x^2 + 1 = 0$-ból kifejezve $x^2 = -1$ miatt), így a függvénynek nincs zérushelye.

(3) Meg kell vizsgálnunk a függvény határértéke a $\pm\infty$ – ben és a 0-ban.

$$\lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x} = \infty, \text{ és } \lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0+0} x + \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty}\left(0 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{\left(0 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + n = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0-0} x + \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty}\left(0 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{\left(0 - \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} - n = -\infty.$$

(4) Keressük meg a függvény szélsőértékhelyeit.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2},$$

azaz az $1 - \frac{1}{x^2} = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amelynek két megoldása van: $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$. Ezek alapján $y_1 = 2$ és $y_2 = -2$ a két függvényérték.

(5) Határozzuk meg az f függvény lehetséges inflexiós pontjait.

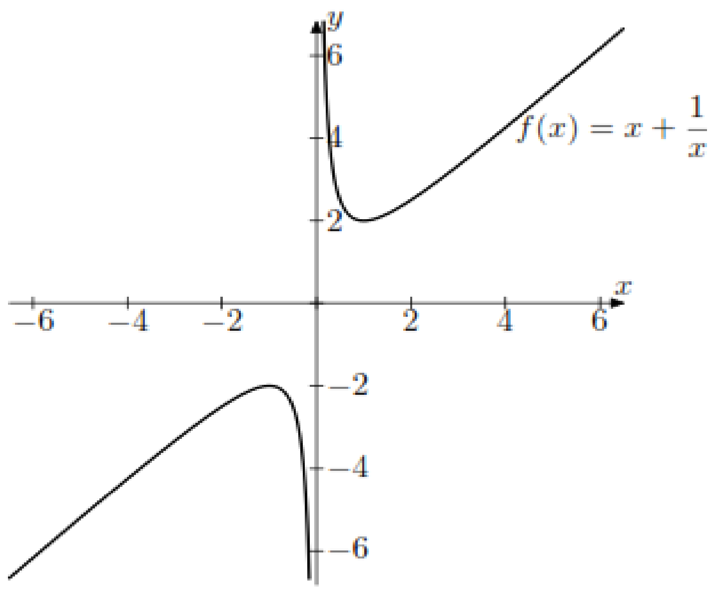
$$f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

Így a $\frac{2}{x^3} = 0$ egyenletet kell megoldanunk, aminek nincs megoldása, így a függvénynek nincs inflexiós pontja.

(6) Készítsük el a szükséges táblázatot az 1,-1,0 pontok segítségével.

	x < -1	x = -1	-1 < x < 0	x = 0	0 < x < 1	x = 1	1 < x
f''	–	–	–	|	+	+	+
f'	+	0	–	|	–	0	+
f	↗	MAX	↘	szakadási hely	↘	MIN	↗
		konkáv				konvex	

(7) A függvény grafikonja



3 Gyakorló feladatok

1. Végezze el a következő függvények teljes vizsgálatát!

a) $f(x) = x - x^2$

b) $f(x) = x - x^3$

c) $f(x) = x^2 - x^4$

d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 8$

e) $f(x) = x^3 - 48x$

f) $f(x) = x^4 - 8x^2$

g) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

h) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

i) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

j) $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + \frac{4}{\mathrm{x}^2}$

k) $f(x) = \frac{x^2}{1 + x}$

l) $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$

m) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$