Többváltozós függvények

Dr. Vincze Szilvia

14. Parciális deriválás

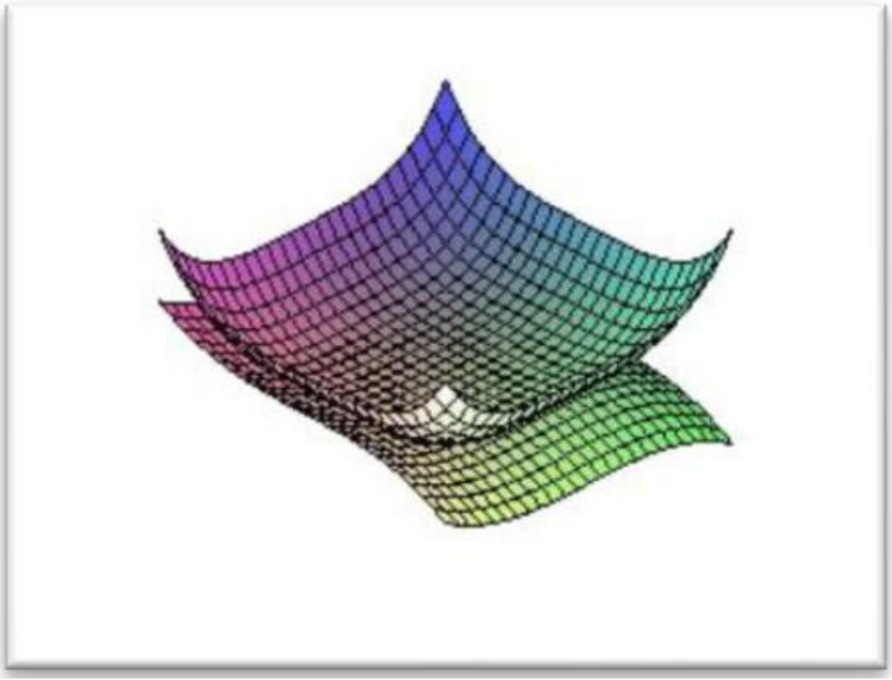
14.1 Többváltozós függvény fogalma
14.2 Parciális deriválás
14.3 Parciális derivált geometriai jelentése
14.4 Gömbkörnyezet fogalma
14.5 Többváltozós függvény szélsőértékének fogalma

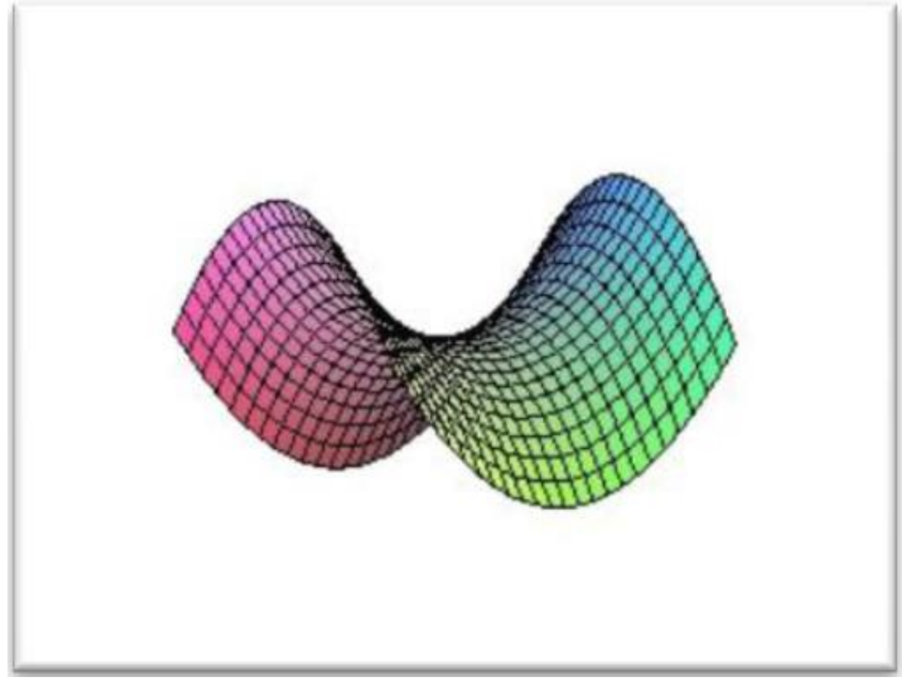
Bevezető gondolatok

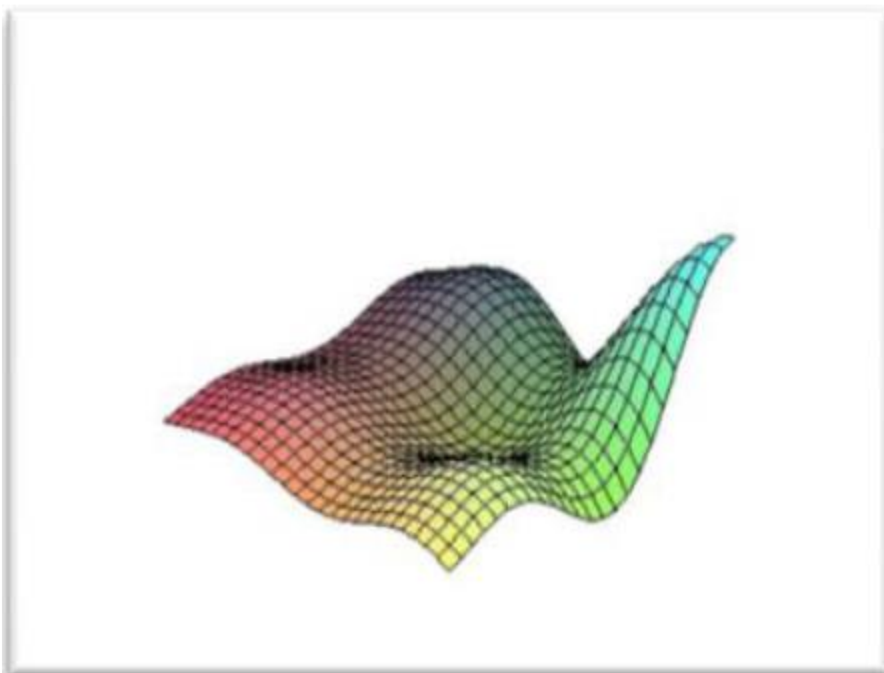
Egy adott talajtípuson az átlagosnak megfelelő időjárási viszonyok között a búza hozamát hektáronként a felhasznált nitrogén és foszfor hatóanyag erősen befolyásolja. A hektáronként kijuttatott hatóanyag (N) és foszfor (P) mennyiségét 50 kg/ha-ban mérjük. Az elérhető hozamot (H) t/ha-ban adjuk meg. A hozam és a műtrágyák között megadható egy függvénykapcsolat. Milyen nitrogén és foszfor mennyiség esetén lesz maximális a hozam?

Bevezető gondolatok

Egy mezőgazdasági nagyüzem három tábláján különböző növényeket termesztenek. A talajtani vizsgálatok és a termeszteni kívánt növények tápanyagszükségletei alapján mindhárom táblát más-más műtrágyakeverékkel kezelik. Megállapították a kiszórt műtrágya és a hektáronkénti terméshozam közötti összefüggéseket, melyeket függvényekkel adtak meg. A műtrágyák milyen mennyiségei mellett lesz a három tábla együttes hozama maximális (ismerjük a táblák nagyságát, azt az összeget, ami a beszerzésre rendelkezésünkre áll és a műtrágyák egységárait ha-onként).








11kép.jp

14.1 Többváltozós függvény fogalma

Az $f : R \times R \times . . . \times R \rightarrow R$ függvényt **n-változós valós értékű függvény**nek nevezzük.

Jelölése: $f(x_1, x_2, . . . , x_n)$.

Példa

Határozza meg az alábbi függvény **első- és másodrendű parciális derivált**jait:

$$f(x,y)=x^4+2x^3-5xy^2+xy-6y^3+y^2$$

$$f(x,y,z)=2xy^2+\frac{\sqrt{z}}{x^3}$$

14.2 Parciális deriválás

Parciális deriváltnak nevezzük a többváltós függvények olyan deriváltját, amikor a függvényt egyik változójának függvényeként fogjuk fel, eszerint deriválunk, miközben a többi változót állandónak tekintjük.

Elsőrendű parciális derivált a k-dik változó szerint

- az f(x,y,z) függvény esetén rögzítsünk két változót, pl. az elsőt és a harmadikat
- egyváltozós függvényt már tudunk deriválni egy pontban -> ez az eredeti függvénynek a 2-dik változó szerinti első parciális deriváltja

Eredmény: többváltozós, skalár értékű függvény

14.3 Parciális derivált geometriai jelentése

- Geometriai jelentés: érintők iránytangense

- Egy z = f(x,y) kétváltozós függvény parciális deriváltja egy adott (A, B) pontban: az x,y változókhoz tartozó parciális függvények deriváltjai

- A függvénygrafikonból ez geometriailag úgy származtatható, hogy az $x = A$, illetve az $y = B$ egyenletű síkokkal elmetsszük a függvény által meghatározott felületet, és a keletkezett görbéknek, mint egyváltozós függvényeknek meghatározzuk a deriváltjait a keresett pontban.

14.4 Gömbkörnyezet fogalma

Az $x_0 \in R^n$ pont r sugarú (nyílt gömb) környezete:

$$G(x_0, r) = \{ x \in R^n \mid |x - x_0| < r \}$$

14.4 Többváltozós függvény szélsőértékének fogalma

Az $f : D\ (\in R^n) \to R$ n-változós valós függvénynek az értelmezési tartomány x_0 pontjában helyi (lokális) **maximum**a van, ha az x_0-nak valamely $G(x_0, r)$ környezetében $f(x_0) \geq f(x)$ minden $x \in D \cap G(x_0, r)$ esetén. **Globális maximum**ról beszélünk, ha a fenti reláció nemcsak x_0 valamely környezetében, hanem az egész értelmezési tartományon fennáll.

14.5 Többváltozós függvény szélsőértékének fogalma

Az $f : D \; (\in R^n) \to R$ n-változós valós függvénynek az értelmezési tartomány x_0 pontjában helyi (lokális) **minimuma** van, ha az x_0-nak valamely $G(x_0, r)$ környezetében $f(x_0) \le f(x)$ minden $x \in D \cap G(x_0, r)$ esetén. **Globális minimum**ról beszélünk, ha a fenti reláció nemcsak x_0 valamely környezetében, hanem az egész értelmezési tartományon fennáll.

Köszönöm a figyelmet!