SOROZATOK JELLEMZÉSE, SOROZATOK HATÁRÉRTÉKE

1 Ellenőrző kérdések

1. Definiálja a sorozat fogalmát!
2. Hogyan lehet megadni egy sorozatot?
3. Hogyan lehet a sorozatokat szemléltetni?
4. Milyen műveleteket értelmezhetünk két sorozat között?
5. Mikor mondjuk, hogy egy sorozat monoton, ill. korlátos?
6. Mit értünk egy sorozat pontos alsó ill. pontos felső korlátján?
7. Mit értünk egy sorozat maximumán, ill. minimumán?
8. Mikor mondjuk, hogy egy sorozat határértéke az A valós szám?
9. Mikor mondjuk, hogy egy sorozat ∞-be ill. $-\infty$-be tart?
10. Milyen kapcsolat van a sorozatok konvergenciája és korlátossága között? megfordítható-e ez a tétel?
11. Milyen kapcsolat van a sorozatok monotonitása, korlátossága és konvergenciája között? Megfordíthatók-e ezek az állítások?
12. Mit tud két konvergens sorozat összegéről, szorzatáról és hányadosáról?
13. Ha (a_n) és (b_n) konvergens sorozat, akkor mit állíthatunk az (a_n+b_n) sorozat konvergenciájáról?
14. Ha (a_n) és (b_n) konvergens sorozat, akkor mit állíthatunk az $(a_n b_n)$ sorozat konvergenciájáról?
15. Adjon meg sorozatokra vonatkozóan nevezetes határértékeket.
16. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, ill. hamisak.
    a. Egy sorozat maximuma és minimuma mindig létezik, supremuma ill. infimuma azonban nem.
    b. Azt mondjuk, hogy egy sorozat divergens, ha nem konvergens.
    c. A határérték mindig egyértelmű.
    d. Minden konvergens sorozat korlátos.
    e. Ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens is.
    f. Az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos és konvergens, határértéke az 1.
    g. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$
    h. Konvergens sorozat skalárszorosának a határértékei a sorozat határértékének a skalárszorosa.
    i. Ha egy számtani sorozat differenciája kisebb mint 0, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő.

2 Példák

1. Vizsgálja meg az $a_n = \dfrac{5n-2}{5-10n}$ és $b_n = \dfrac{3}{2n-1}$ sorozatok monotonitását és korlátosságát.

Megoldás:

(1) Állítsuk elő az $a_{n+1} - a_n$ különbséget.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{5(n+1)-2}{5-10(n+1)}-\frac{5n-2}{5-10n}=\frac{5n+3}{-5-10n}-\frac{5n-2}{5-10n}=$$
$$=\frac{(5n+3)(5-10n)-(5n-2)(-5-10n)}{(-5-10n)(5-10n)}=\frac{5}{-(5+10n)(5-10n)}=\frac{5}{+}>0.$$

Ez a kifejezés minden $n\in\mathbf{N}$ esetén pozitív, azaz a sorozat szigorúan monoton növekedő.

Mivel $a_n=\frac{5n-2}{5-10n}=-\frac{5n-2}{10n-5}<0$, ezért az egyenlőtlenségből következik, hogy a sorozat egyik felső korlátja a 0. A sorozat első eleme $a_1=\frac{-3}{5}$ a sorozat egy lehetséges alsó korlátja, mivel a sorozat monoton növekedő; azaz a sorozat korlátos is.

(2) Most állítsuk elő a $b_{n+1}-b_n$ különbséget. Ekkor

$$b_{n+1}-b_n=\frac{3}{2(n+1)-1}-\frac{3}{2n-1}=\frac{3}{2n+1}-\frac{3}{2n-1}=$$
$$=\frac{3(2n-1)-3(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{-6}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{-6}{+}<0.$$

A kifejezés minden $n\in\mathbf{N}$ esetén negatív, azaz a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Mivel $b_n=\frac{3}{2n-1}>0$ minden $n\in\mathbf{N}$ esetén, a sorozat egyik alsó korlátja a 0. A sorozat monoton csökkenő, tehát egy lehetséges felső korlátja a sorozat első eleme ($b_1 = 3$), azaz a b_n sorozat korlátos.

2. Bizonyítsa be, hogy a $c_n=\frac{2n+4}{n+1}$ sorozat konvergens és határértéke 2.

Megoldás:

A konvergencia definíciója szerint a $|c_n-2|<\varepsilon$ egyenlőtlenségnek kell teljesülni egy N küszöbindextől kezdve. Legyen $\varepsilon=10^{-1}=0{,}1$. Ekkor a $\left|\frac{2n+4}{n+1}-2\right|<\frac{1}{10}$ egyenlőtlenségnek kell fennálnia az N küszöbindextől kezdve.

$$\left|\frac{2n+4}{n+1}-2\right|=\left|\frac{2n+4-2n-2}{n+1}\right|=\frac{2}{n+1}<\frac{1}{10},$$

azaz

$$20 < n + 1, \text{ vagyis}$$
$$19 < n.$$

Tehát $\varepsilon=10^{-1}=0{,}1$ és N = 19 küszöbindex esetén $|c_n-2|<\varepsilon$ teljesül minden n > N esetén. Legyen az $\varepsilon>0$ tetszőlegesen kicsi szám. Ekkor

$$\left|\frac{2n+4}{n+1}-2\right| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon,$$

$$\frac{2}{\varepsilon} < n+1,$$

$$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < n.$$

Tehát N = $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right] - 1$ választás minden $\varepsilon > 0$ esetén megfelelő lesz.

3. Vizsgálja meg, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a $b_n = \frac{n+3}{2n-1}$ sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetébe!

Megoldás:

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$, így meg kell határoznunk a sorozatnak azt a tagját, mely már az $\frac{1}{2}$-nek az $\varepsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetébe esik.

$$\left|\frac{n+3}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+6-2n+1}{2(2n-1)}\right| = \frac{7}{2(2n-1)}.$$

Ha ez az eltérés valamely n-re kisebb, mint $10^{-3} = \frac{1}{1000}$, akkor a megfelelő tag az $\frac{1}{2}$-nek az $\varepsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetében van. Meg kell oldani a $\frac{7}{2(2n-1)}. < \frac{1}{10^3}$ egyenlőtlenséget.

Az egyenlőtlenség megoldása n > 1 750. Így tehát az 1 751-edik tag az első olyan tag, amely már a határéket ezrednyi pontossággal közelíti meg.

4. Határozza meg az $a_n = \frac{3n^2-9n+5}{n^2+2n-1}$ sorozat határértékét!

Megoldás:

Osszuk végig a számlálót és a nevezőt a nevezőben lévő legnagyobb fokszámú taggal, jelen esetben n^2-tel.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-9n+5}{n^2+2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{9}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$ és $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, illetve

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n} = 9\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 9\cdot 0 = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2\cdot 0 = 0$, valamint

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0$, és ez utóbbiból adódik, hogy

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 0$, így a határértékre kapjuk, hogy

5. Határozzuk meg az $f_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}}\right]^{\frac{2}{3n}\cdot(2n-1)}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}} = \left(1+\frac{(-1)}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}} = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

ezért csak a kitevő határértékét kell megvizsgálni.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3n}(2n-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n}}{3} = \frac{4}{3},$$

így

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{e^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^4}}.$$

3 Gyakorló feladatok

3.1 Sorozatok megadása, szemléltetése

1. Adja meg az alábbi sorozat n-edik elemét és szemléltesse a sorozatot!

$$3, \frac{5}{4}, 1, \frac{9}{10}, \frac{11}{13}, \ldots$$

2. Írja fel az alábbi, rekurzív képlettel definiált sorozatok első négy tagját és a 10. tagot!

a) $a_1 = 10 \text{ és } a_n = \frac{a_{n-1}}{5} \quad ha\ n \geq 2$

b) $a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ és } a_n = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2} \quad ha\ n > 2$

3. Határozza meg a következő sorozatok általános tagját!

a) $(1,3,5,7,9,\ldots)$

b) $(1; -0{,}1; 0{,}01; -0{,}001; \ldots.)$

c) $(1,0,1,0,1,0,1,\ldots)$

3.2 Sorozatok jellemzése

1. Jellemezze az alábbi sorozatokat monotonitás, korlátosság, szélsőérték és határérték szempontjából!

$a_n = -2 + \frac{3}{n}$ $\quad b_n = 5 - \frac{4}{n}$ $\quad c_n = -2n^2 + 1$ $\quad d_n = \frac{1}{n^2} + 3$

$e_n = \frac{2n+3}{n+1}$ $\quad f_n = \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1}$ $\quad g_n = \frac{n+1}{n}$ $\quad h_n = \frac{n-1}{n+2}$

$i_n = \frac{5n-2}{5-10n}$ $\quad j_n = \frac{1+n^2}{n^2+4}$

3.3 Sorozatok határértéke

1. Vizsgálja meg, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat tagjai a határérték 10^{-2} sugarú környezetébe?

$a_n = \frac{n+2}{3n-8}$ $\quad b_n = \frac{n+1}{2n-7}$ $\quad c_n = \frac{n}{1+10n}$

2. Adja meg az alábbi sorozatok határértékét!

2.a.) Polinom

$a_n = 3 + \frac{2}{n}$ $\quad a_n = 100 - 5n^2$ $\quad a_n = -3n^2 + 6$

$a_n = -5 + 3n$

2.b.) Polinom / Polinom

$b_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^3 - 5n + 2}$ $\quad c_n = \frac{5n^2 - 2n + 3}{-3n + 8}$ $\quad a_n = \frac{2n^2 - 3n + 5}{-n + 3}$

$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad a_n = \frac{n-1}{n+2}$ $\quad a_n = \frac{2n^2 - 3n}{n^2 + 1}$

$a_n = \frac{4n^3 + 5n^2 + 6n + 7}{1 - 9n^2 - 27n^3 + 3n^4}$ $\quad a_n = \frac{81n^6 - 8n^5 - 12n^2 + 3}{9 - 17n^2 + 3n^3 - 9n^5}$ $\quad a_n = \frac{n^3 - 1}{(n+1)^2}$

$a_n = \frac{2n^3 - 4}{5n^3 - 2n^2}$ $\quad a_n = \frac{5n^2 - 2}{3n + 1}$ $\quad a_n = \frac{-4n^2 + 6}{5n^3 - 2n}$

2.c.) Exponenciális kifejezést tartalmazó

$a_n = 2^n$ $\quad a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{3^n}$ $\quad a_n = \frac{2^{n+1} - 1}{1 + 2^n}$

$a_n = \frac{2^n}{2^n + 1}$

2.d.) Gyökös kifejezést tartalmazó

$k_n = \sqrt{5n^2 - 2} - n$ $\qquad a_n = \sqrt[n]{15}$ $\qquad a_n = \sqrt{1 + \frac{3}{n}}$

$a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ $\qquad a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ $\qquad a_n = \sqrt{5n^2 + 1} - n$

$a_n = \sqrt{9n^2 + 2n - 1} - 3n$

2.e.) Gyök kifejezés / Gyök kifejezés

$h_n = \frac{\sqrt[3]{2n^2 - 3n + 5}}{\sqrt[3]{n^2 + 5n + 2}}$ $\qquad i_n = \frac{\sqrt{2n^3 + 6n - 5}}{\sqrt[4]{n^4 + 2n^3 - 5n^2 + 3}}$ $\qquad j_n = \frac{\sqrt[3]{2n^3 - 5n} + \sqrt{2n^2}}{\sqrt[4]{2n^4 + 3n^2 - 5n}}$

$a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{n + \sqrt{2}}$ $\qquad a_n = \frac{\sqrt[4]{n^5 + 6n^2 + 3} - n^2}{\sqrt[3]{n^5 + 4n - 7} + 2n^2}$ $\qquad a_n = \frac{\sqrt{n^3 + 5n^2 - 8}}{\sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 2}}$

$a_n = \frac{\sqrt[3]{4n^2 + 2n + 100}}{\sqrt[3]{5n^2 - 6n - 10}}$ $\qquad a_n = \frac{\sqrt[3]{4n^2 + 3n}}{n + 2}$ $\qquad a_n = \frac{\sqrt{n^3 + 5n^2}}{\sqrt[3]{n^3 - 4n^2}}$

$a_n = \frac{\sqrt{3n^2 + 2} + \sqrt{2n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - n}$

2.f.) $(1+1/n)^n$ alakú kifejezést

$d_n = \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{5n+3}$ $\qquad e_n = \left(1 - \frac{2}{5n^2 + 1}\right)^{n^2+3}$ $\qquad f_n = \left(3 + \frac{5}{2n - 1}\right)^{\frac{1}{n}}$

$g_n = \left(\frac{2n+1}{3n+3}\right)^{5n+3}$ $\qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $\qquad a_n = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{n}\right)^{n}$

$a_n = \left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{n+1}$ $\qquad a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n}$ $\qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$

$a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n}$ $\qquad a_n = \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n}$ $\qquad a_n = \left(\frac{n-3}{n-5}\right)^{n}$

$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n}$ $\qquad a_n = \left(\frac{3n+1}{3n+5}\right)^{6n+7}$ $\qquad a_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{n^2+1}$

$a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n+1}$ $\qquad a_n = \left(\frac{5n-3}{5n+3}\right)^{n-2}$ $\qquad a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+5}$

$a_n = \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n^2+1}$ $\qquad a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$ $\qquad a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{n}$

$a_n = \left(\frac{n-1}{3n}\right)^{n}$ $\qquad a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\qquad a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$